FS ČVUT - příjmačky

ČESKÉVYSOKÉUČENÍTECHNICKÉVPRAZE,FAKULTASTROJNÍ
PŘIJÍMACÍ ZKOUŠKY DO NAVAZUJÍCÍCH MAGISTERSKÝCH
STUDIJNÍCH PROGRAMŮ

APLIKOVANÁ MATEMATIKA

1. Absolutní (globální) extrémy spojité funkce jedné proměnné v uzavřeném omezeném intervalu.

2. Taylorův polynom n-tého stupně dané funkce *f*. Lagrangeův tvar zbytku.
   Přibližný výpočet hodnoty funkce *f* v daném bodě pomocí Taylorova polynomu. Odhad chyby (nepřesnosti) přibližného výpočtu pomocí Lagrangeova tvaru zbytku.

3. Vlastní čísla a vlastní vektory matice typu 3 krát 3.

4. Plošný integrál vektorové funkce. Výpočet pomocí parametrizace plochy: kvadratické plochy v základní i posunuté poloze, plocha ve tvaru grafu funkce dvou proměnných, plocha se zadanou parametrizací. Tok vektorového pole danou plochou.

5. Tok vektorového pole uzavřenou plochou: paraboloid omezený rovinou, povrch válce, povrch kužele. Gaussova – Ostrogradského věta. Užití cylindrických souřadnic.

6. Diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty. Fundamentální systém řešení. Obecné řešení rovnice homogenní. Partikulární řešení a obecné řešení rovnice nehomogenní. Maximální řešení dané Cauchyovy úlohy pro homogenní i nehomogenní rovnici.

7. Soustava nelineárních autonomních diferenciálních rovnic (n=2).
   Jacobiova matice. Existence a jednoznačnost maximálního řešení Cauchyovy úlohy.
   Určení rovnic fázových trajektorií dané soustavy. Výpočet bodů rovnováhy.

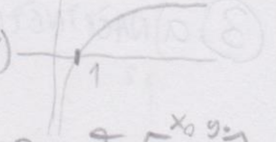
PŘÍKLADY 3 × 10 b. → $\underline{\underline{30\ b}}$/100

IIII ● ROVNICE TEČNY, $T_2(x)$, $R_3(x)$, ~~[illegible]~~
III ● HOMOGENÍ DIF. ROV, FUND. SYST., C. Ú., METODA ODHADU
III ● PLOCHA Q, $\vec{n}_Q$, TOK VEKTOR. POLE
I ● KŘIVKA, GREENOVA VĚTA
III ● D(f), EXTRÉMY
IIII ● VLASTNÍ ČÍSLA A VEKTOR
III ● AUTONOMNÍ SOUSTAVA NELINEÁRNÍCH D.R., DŮKAZ, B.R., ROVNICE FÁZ. TRAJ.

MATIKA (13/14) $\boxed{1}$

VZOREC TEČNY t:

$\boxed{y-y_0=f'(x_0)\cdot(x-x_0)}$ $f(x)=\ln(x)$



① $f(x)=\ln(x+1)-\frac{1}{2}\cdot x^2$

a) ROVNICE TEČNY: V BODĚ $T=[\overset{0}{x_0};\overset{y_0}{f(x_0)}]$; $x_0=0$ $\rightarrow y=\ln(1)-\frac{1}{2}\cdot 0^2=0 \rightarrow T=[\overset{x_0}{0};\overset{y_0}{0}]$

$f'(x)=\frac{1}{(x+1)}\cdot(1+0)-\frac{1}{2}\cdot 2x=\frac{1}{(x+1)}-x \quad f'(\overset{x_0}{0})=1$ $\boxed{\text{DERIVACE = SMĚRNICE TEČNY}}$

$t:\ y=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+y_0 \rightarrow t:\ y=1\cdot(x-0)+0 \rightarrow t:\ y=x$

b) TAYLOR: $T_2(x)$, STŘED $x_0=0$; PŘIBLIŽNÁ HODNOTA $f(x)$ PRO $x=\frac{1}{3}$

$\boxed{T_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0)+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n}$ $T_2(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1}\cdot(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$

$f''(x)=-\frac{1\cdot 1}{(x+1)^2}-1 \Rightarrow T_2(x)=0+\left(\frac{1}{1}\right)\cdot(x-0)+\left(\frac{-2}{2}\right)\cdot(x-0)^2=x-1\cdot x^2$

$(x+1)^{-1}\rightarrow -1\cdot(x+1)^{-2}$ $\rightarrow T_2\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}-\cdot\left(\frac{1^2}{3^2}\right)=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}=\frac{3-1}{9}=\frac{2}{9}$

c) LAGRANGEŮV ZBYTEK: $R_3(x)$; ODHAD CHYBY $R_3\left(\frac{1}{3}\right)$ VE TVARU ZLOMKU

$\boxed{R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1} \quad \text{KDE } \xi \text{ LEŽÍ MEZI } x \text{ a } x_0}$ $f'''(x)=\frac{2}{(x+1)^3}$ $R_3(x)=\frac{\frac{2}{(\xi+1)^3}}{6}\cdot(x-x_0)^3$

$R_3(x)=\frac{1}{3\cdot(\xi+1)^3}\cdot x^3$ (ξ JE MEZI x a x_0) $R_3\left(\frac{1}{3}\right)\Rightarrow \xi\in\left(0;\frac{1}{3}\right)$

$\Rightarrow R_3\left(\frac{1}{3}\right)\leq\left|\frac{1}{3\cdot(0+1)^3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\right|=\left|\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3\cdot3\cdot3}\right|=\frac{1}{3^4} \Rightarrow R_3\left(\frac{1}{3}\right)\leq\left|\frac{1}{81}\right|$

② a) HOMOGENÍ D.R.: $\ddot{x}+\dot{x}-6x=0$; FUND. SYSTÉM? OBECNÉ ŘEŠENÍ? CAUCH. ÚLOHA pro P.P.: $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=5$

$\boxed{y=e^{\lambda t}}$ $\Rightarrow$ CHARAKTERISTICKÁ ROVNICE $\boxed{\lambda^2+a_1\cdot\lambda+a_2=0}$ $\rightarrow \overset{a}{\lambda^2}+\overset{b}{1}\cdot\lambda-\overset{c}{6}=0$ $\boxed{\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot ac}}{2a}}$

$((x)=e^{\lambda t})$

$\Rightarrow \frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot1\cdot(-6)}}{2\cdot1}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2}$ $\lambda_1=\frac{4}{2}=2$, $\lambda_2=\frac{-6}{2}=-3$ $\}$ F.S.Ř. $=\{\overset{\varphi_1}{e^{2t}};\overset{\varphi_2}{e^{-3t}}\}$ VIZ VZORCE Z M III.

OBECNÉ ŘEŠENÍ $\boxed{x_H(t)=c_1\cdot\varphi_1+c_2\cdot\varphi_2}$ $x(t)=c_1\cdot e^{2t}+c_2\cdot e^{-3t}$ $\boxed{t;c_1;c_2\in\mathbb{R}}$

ŘEŠENÍ C.Ú.: $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=5$ $\Rightarrow \dot{x}(t)=2\cdot1\cdot c_1\cdot e^{2t}-3\cdot1\cdot c_2\cdot e^{-3t}$ $\boxed{x^{\circ}=1}$

$0=c_1\cdot e^0+c_2\cdot e^0 \rightarrow c_1=-c_2$

$5=2\cdot c_1\cdot e^0-3c_2\cdot e^0 \rightarrow 5=2c_1-3\cdot(-c_1)\Rightarrow c_1=1;\ c_2=-1\}\ x_H(t)=e^{2t}-e^{-3t}\quad t\in\mathbb{R}$

b) NEHOMOGENÍ: $\ddot{x}+\dot{x}-6x=10e^{2t}$; PARTIKULÁRNÍ ŘEŠ? OBECNÉ ŘEŠENÍ? METODA ODHADU

$f(t)=10e^{2t}$; $ax=2t \rightarrow a=\lambda \rightarrow$ 1 SHODA $(t^1)\Rightarrow x_p(t)=A\cdot e^{2t}\cdot t$ $\Rightarrow \dot{x},\ddot{x}$ (DERIVACE SOUČINU)

$\dot{x}_p(t)=A\cdot e^{2t}+2\cdot A\cdot e^{2t}\cdot t$ DOSAZENÍ DO PŮV.

$\ddot{x}_p(t)=2Ae^{2t}+2Ae^{2t}+4Ae^{2t}\cdot t$ $\}$ $2Ae^{2t}+2Ae^{2t}+4Ae^{2t}\cdot t+Ae^{2t}+2Ae^{2t}\cdot t-6\cdot Ae^{2t}\cdot t=10e^{2t}$

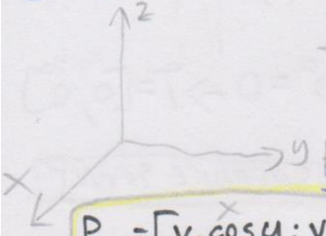
$\Rightarrow$ TY KTERÉ JSOU BEZ $\cdot t$ POROVNÁM S $f(t)$

$\Rightarrow 2Ae^{2t}+2Ae^{2t}+Ae^{2t}=5Ae^{2t}=10e^{2t}\rightarrow 5A=10\Rightarrow A=2$ $\Rightarrow x_p(t)=2\cdot e^{2t}\cdot t$

$\Rightarrow x(t)=x_H(t)+x_p(t)=e^{2t}-e^{-3t}+2\cdot e^{2t}\cdot t$ (OBECNÉ ŘEŠENÍ JE S NEVYČÍSLENÝMA c_1 A c_2)

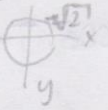
$t\in(-\infty;\infty)$

③ a) NAČRTNĚTE PLOCHU Q (ČÁST PARABOLOIDU) $Q=\{[x,y,z]\in E_3;\ z=4-x^2-y^2;\ z\geq 0\}$ (PLOCHA)



PARABOLOID: $z=x^2+y^2 \xrightarrow{\text{DOS. }z} x^2+y^2=4-x^2-y^2 \rightarrow \cancel{2}(x^2+y^2)=\cancel{4}\,2$

(KRUŽNICE): $r^2=x^2+y^2 \rightarrow r=\sqrt{2}$



PARAMETRIZACE: (PRO PARABOLOID)

$\boxed{P_{(u,v)}=[\overset{x}{v\cdot\cos u};\ \overset{y}{v\cdot\sin u};\ \overset{z}{v}];\ P_u=\frac{\partial P}{\partial u};\ P_v=\frac{\partial P}{\partial v}}$ $z=\cancel{4}-v^2\cdot\cos^2 u-v^2\cdot\sin^2 u \Rightarrow P(u,v)$

$P_u=[-v\cdot\sin u;\ v\cdot\cos u;$

MATIKA 14/15 $\boxed{2}$

① $f(x)=e^{3x-6}-x$ a) ROVNICE TEČNÝ: V BODĚ $[\overset{x_0}{2};\overset{f(x_0)}{y_0}]$ $\boxed{y-y_0=f'(x_0)\cdot(x-x_0)}$

$y_0=e^{3\cdot2-6}-2=e^0-2=1-2=-1 \rightarrow T=[\overset{x_0}{2};\overset{y_0}{-1}]$ $f'(x)=e^{3x-6}\cdot3-1 \Rightarrow f'(x_0)=3-1=2$

TEČNA: $y=f'(x_0)\cdot(x-x_0)+y_0=2\cdot(x-2)-1=2x-4-1=2x-5=y$

b) $T_2(x)$ O STŘEDU $x_0=2$; PŘIBLIŽNÁ HODNOTA V $x=\frac{5}{3} \Rightarrow f''(x)=e^{3x-6}\cdot3\cdot3=9e^{3x-6}$

$f''(x_0=2)=9$ $\boxed{T_2(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}\cdot(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}\cdot(x-x_0)^2}=-1+2\cdot(x-2)+\frac{9}{2}\cdot(x-2)^2$

$\boxed{T_2(x)\doteq f(x)}$ $T_2(\frac{5}{3})=-1+2\cdot(-\frac{1}{3})+\frac{9}{2}\cdot(-\frac{1}{3})^2=-1-\frac{2}{3}+(\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{9})=-\frac{6}{6}-\frac{4}{6}+\frac{3}{6}=-\frac{7}{6}\doteq f(x)$

c) $R_3(x)$; ODHAD VELIKOSTI CHYBY $R_3(\frac{5}{3})$ VE ZLOMKU $\Rightarrow f'''(x)=9e^{3x-6}\cdot3=27e^{3x-6}$

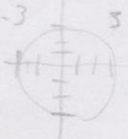
$R_3(x)=\frac{27\cdot e^{3\xi-6}}{3\cdot2\cdot1}\cdot(x-2)^3$ $R_3(\frac{5}{3})=\frac{9\cdot3}{2\cdot3}\cdot e^{3\xi-6}\cdot(-\frac{1}{27})=-\frac{1}{6}\cdot e^{3\xi-6}$ ξ JE MEZI $\frac{5}{3}$ A 2

$R_3(\frac{5}{3})\leq\begin{pmatrix}\text{ZA } \xi\\ \text{DOS. } x_0\end{pmatrix}\left|\frac{27}{6}\cdot e^0\cdot(\frac{5}{3}-\frac{6}{3})^3\right|=\left|\frac{27}{6}\cdot(-\frac{1}{27})\right|$ $R_3(\frac{5}{3})\leq\left|-\frac{1}{6}\right|\leq\frac{1}{6}$

② KŘIVKA $C=\{[x,y]\in E_2; x^2+y^2=9\}$ VYZNAČIT KLADNOU ORIENTACI

a) GREENOVA VĚTA:
- $\boxed{1}$ VEKTOROVÁ fce MÁ SPOJITÉ DERIVACE V **D**
- $\boxed{2}$ KŘIVKA **C** JE JEDNODUCHÁ, UZAVŘENÁ, PO ČÁSTECH HLADKÁ A KLADNĚ ORIENTOVANÁ (?)
- $\boxed{3}$ INTERIÉR KŘIVKY JE PODMNOŽINOU **D** A JSOU V NĚM SPOJITÉ PARCIÁLNÍ DERIVACE

$\boxed{\text{PRO } \vec{f}=(U;V) \text{ JE } \oint_C \vec{f}\cdot d\vec{s}=\iint_{\text{INT } C}\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\,dx\,dy}$ $C: x^2+y^2=9$ (KRUŽNICE O r=3)



CIRKULACE VEKTOROVÉHO POLE: $\vec{f}=(x-2y;x)=\vec{f}(U;V) \Rightarrow \iint_{\text{INT } C}\frac{\partial x}{\partial x}-\frac{\partial x-2y}{\partial y}\,dx\,dy$

$\iint_{\text{IC}} 1-(-2)\,dx\,dy=\iint 3\,dx\,dy$ MEZE: $-3\leq x\leq3$; $0\leq y\leq\sqrt{9-x^2}$

$\Rightarrow\int_{-3}^{3}(\int_0^{\sqrt{9-x^2}}3\,dy)dx=\int_{-3}^{3}[3y]_0^{\sqrt{9-x^2}}dx=\int_{-3}^{3}3\cdot\sqrt{9-x^2}\,dx=\ldots$ (27π)

POLÁRNÍ SOUŘADNICE: $\boxed{\begin{matrix}x=r\cdot\cos\varphi & \varphi\in\langle0;2\pi\rangle\\ y=r\cdot\sin\varphi & J=r\end{matrix}}$ $\boxed{\begin{matrix}J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\varphi}\end{vmatrix}\\ dx\,dy\rightarrow J\cdot dr\,d\varphi\end{matrix}}$

NOVÉ MEZE: $0\leq\varphi\leq2\pi$ $\vec{f}(U,V)$ $U=r\cdot\cos\varphi-2\cdot r\cdot\sin\varphi$
$0\leq r\leq r$ $V=r\cdot\cos\varphi$

b) PARAMETRIZACÍ: $\boxed{\text{KRUŽNICE}: P_t=(r\cdot\cos t;r\cdot\sin t)}$ $\begin{matrix}x=3\cos t\\ y=3\sin t\end{matrix}$ $t\in\langle0;2\pi\rangle$ SOUHLASNÁ ORIENTACE

$$\oint_C\vec{f}\cdot d\vec{s}=\int_0^{2\pi}(\underbrace{3\cos t-6\cdot\sin t}_{x-2y};\underbrace{3\cos t}_{x})\cdot(-3\sin t;3\cos t)dt$$

$$=\int_0^{2\pi}(-9\sin t\cdot\cos t+18\sin^2 t+9\cos^2 t)dt=27\pi$$

③ HOMOG. DIF. ROV. $\ddot{x}+2\dot{x}-3x=0$ $\boxed{x=e^{\lambda t}}$ CHAR. ROVNICE $\Rightarrow \lambda^2+2\cdot\lambda-3=0$

a) F.S.? OBECNÉ ŘEŠ.? C.Ú PRO $x(\overset{t}{0})=6$; $\dot{x}(\overset{t}{0})=0$

$$\frac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot1\cdot(-3)}}{2} \Rightarrow \lambda_1=1 \quad \lambda_2=-3 \rightarrow FS=\{\varphi_1;\varphi_2\}=\{e^{1\cdot t};e^{-3t}\}$$

$$x_H(t)=c_1\cdot e^{1t}+c_2\cdot e^{-3t} \quad \boxed{t\in(-\infty;+\infty)} \quad C.Ú.:\Rightarrow \dot{x}(t)=1\cdot c_1\cdot e^{1t}-3\cdot c_2\cdot e^{-3t}$$

P.P.: $6=c_1\cdot e^{1.0}+c_2\cdot e^{-3.0}=c_1+c_2 \rightleftarrows 3c_2+c_2=6=4c_2 \Rightarrow c_2=\frac{3}{2} \Rightarrow c_1=\frac{9}{2}$

$0=c_1\cdot e^0-3c_2\cdot e^0=c_1-3c_2 \rightarrow c_1=3c_2$ $\quad x(t)=\frac{9}{2}e^{t}+\frac{3}{2}e^{-3t}, \ t\in(-\infty;\infty)$

b) PARTIK. ŘEŠENÍ: $\ddot{x}+2\dot{x}-3x=f(t)=15e^{-3t} \Rightarrow ax=-3t \rightarrow a=-3=\lambda_2 \rightarrow$ SHODA (t^1)

$\Rightarrow x_p(t)=A\cdot e^{-3t}\cdot t$ (DERIVACE SOUČINU): $\dot{x}_p(t)=A\cdot e^{-3t}\cdot1-3\cdot A\cdot e^{-3t}\cdot t$

$\ddot{x}_p(t)=-3\cdot A\cdot e^{-3t}-3\cdot A\cdot e^{-3t}\cdot1+9\cdot A\cdot e^{-3t}\cdot t$ $\quad$ POROVNÁNÍ BEZ t

DOSAŽ. DO ROV.

$$\Rightarrow -3A\cdot e^{-3t}-3Ae^{-3t}+9Ae^{-3t}\cdot t+2\cdot A\cdot e^{-3t}-6\cdot Ae^{-3t}\cdot t-3\cdot e^{-3t}\cdot t=15e^{-3t}$$

$$(-6+2)\cdot Ae^{-3t}=-4\cdot A\cdot \cancel{e^{-3t}}=15\cancel{e^{-3t}} \Rightarrow A=-\frac{15}{4}$$

$$x_p(t)=-\frac{15}{4}\cdot e^{-3t}\cdot t \qquad t\in(-\infty;\infty)$$

$$x(t)=x_H+x_p=c_1\cdot e^{1t}+c_2\cdot e^{-3t}-\frac{15}{4}e^{-3t}\cdot t$$

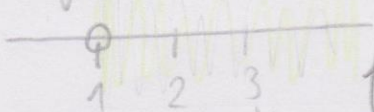
MATIKA 15/16 $\boxed{3}$

① $f(x) = 2 \cdot \sqrt{x-1} - x$

a) DEFINIČNÍ OBOR, ROV. TEČNY V BODĚ $[\overset{x_0}{5}; \overset{y_0}{f(x_0)}]$, HODNOTA V $f(x=\frac{11}{2})$

JMENOVATEL $\neq 0$
ODMOCNINA ≥ 0
LOGARITMUS $\Rightarrow (0; \infty)$

$D(f): (x-1) \geq 0 \rightarrow x \geq 1$



$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

$f'(x) = \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x-1}} - 1 = \frac{1}{\sqrt{x-1}} - 1$

$f'(x_0) = \frac{1}{\sqrt{4}} - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}$

$f(x_0) = 2 \cdot \sqrt{4} - 5 = 4 - 5 = -1 = y_0$

$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \overset{+y_0}{=} -\frac{1}{2} \cdot (x-5) + (-1) = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2} - \frac{2}{2} = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

$f\left(\frac{11}{2}\right) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{11}{2} + \frac{3}{2} = -\frac{11}{4} + \frac{6}{4} \doteq \frac{-5}{4}$

b) EXISTENCE ABSOLUTNÍCH EXTRÉMŮ NA $I = \langle 1; 6 \rangle$ + POLOHA, TYP A HODNOTA EXTRÉMŮ

KRITICKÉ BODY
- KRAJNÍ BODY
- $f'(x) = 0$
- BOD, KDE f' NEEXISTUJE

- INTERVAL I JE UZAVŘENÝ A OMEZENÝ
- $f(x)$ JE V I SPOJITÁ NEBOŤ $I \subset D(f)$

$f' = 0 = \frac{1}{\sqrt{x-1}} - 1 \rightarrow 1 = \frac{1}{\sqrt{2-1}} \Rightarrow x = 2$

} 3 KRITICKÉ BODY

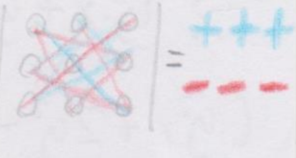
X	1	2	6
$f(x)$	-1	0	$2 \cdot \sqrt{5} - 6$
EXTRÉM	-	MAX	MIN

$f(1) = 2 \cdot \sqrt{0} - 1 = -1$

$f(2) = 2 \cdot \sqrt{1} - 2 = 0$

$f(6) = 2 \cdot \sqrt{5} - 6$

SARUSOVO PRAVIDLO



PODMÍNKA VL. Č.
$\det(A - \lambda \cdot E) = 0$

② VLASTNÍ ČÍSLA MATICE: $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 & 2 \\ -1 & 5-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \cdot (5-\lambda) \cdot (2-\lambda) + 0 + 0 - 0 - 0 - (-1 \cdot 5 \cdot (2-\lambda)) = 0$

$= (15 - 8\lambda + \lambda^2) \cdot (2-\lambda) - (-10 + 5\lambda) = -\lambda^3 - 36\lambda + 40 = 0 \rightarrow \lambda^3 + 36\lambda = 40$

$\Rightarrow \lambda \cdot (\lambda^2 + 36) = 40 \rightarrow \lambda \cdot (\lambda^2 + 36) - 40 = 0$ NEUMIM (VIZ $\boxed{4}$)

$(\lambda_1 = 2; \lambda_{2,3} = 4 \pm 2i)$

b) PRO JEDNO λ URČET VLASTNÍ VEKTORY: $(A - \lambda \cdot E) \cdot \vec{x} = 0 \quad \vec{x} \neq 0$

$A\vec{X} = \lambda \cdot \vec{X}$
$\vec{X}$ = VL. VEKTOR

$\lambda = 2$

$\begin{array}{ccc} x & y & z \\ \end{array}$
$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x + 5y + 2z = 0 \\ -x + 3y + 3z = 0 \end{array}$

PARAMETR (VOLITELNÝ) $\boxed{p = z}$ $\Rightarrow x = -5y - 2p$; $+5y + 2 + 3y + 3p = 0 \rightarrow y = \frac{-3p-2}{8}$

$\Rightarrow x = \left(\frac{15p + 10}{8}\right) - 2p = \frac{15p - 16p}{8} + \frac{10}{8} = \frac{-p + 10}{8}$

~~$\left(\frac{-5}{8}; \frac{9}{8}; 1\right)$~~

$\vec{x} = \left(\frac{-p+10}{8}; \frac{-3p-2}{8}; p\right)^T = \begin{pmatrix} x \\ y \\ p \end{pmatrix}$ $p \in \mathbb{R} - \{0\}$

(ŠPATNĚ, ALE CO UŽ)

③ AUTONOMNÍ SOUSTAVA NELINEÁRNÍCH DIF. ROV.: $\dot{x}=\underbrace{2y(x+2)}_{P(x,y)}$; $\dot{y}=\underbrace{x^2-y^2}_{Q(x,y)}$

= NEZÁVISLÁ NA t

a) FÁZOVÁ ROVINA, TRAJEKTORIE SOUSTAVY ... :

$$\boxed{J=\begin{pmatrix}\frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y}\\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y}\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}2y & 2x+4\\ 2x & -2y\end{pmatrix}$$

SPOJITÁ V E_2

b) BODY ROVNOVÁHY: KDE $P(x,y)=0$, $Q(x,y)=0$

EXISTENCE 1 B.R.: $\det A \neq 0$

$2y(x+2)=0 \rightarrow$ ① $y=0$ ② $x=-2$

$x^2-y^2=0$ ① $x=0$ ② $4-y^2=0$

$y^2=4 \Rightarrow y=\pm 2$

☺ ✓

- $[0;0]$ ①
- $[-2;-2]$ ②
- $[-2;2]$ ②

c) ROVNICE FÁZOVÉ TRAJEKTORIE + V BODĚ $M=[3;1]$

FT JE V BR NEBO INTEGRUJI $\frac{dy}{dx}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2-y^2}{2y(x+2)} \Rightarrow \int 2y(x+2)\,dy=\int x^2-y^2\,dx$

~~$\Rightarrow 2\cdot(x+2)\cdot y\cdot\frac{y^2}{2}=\frac{x^3}{3}-y^2\cdot x \Rightarrow y^3\cdot(x+2)-\frac{x^3}{3}+y^2\cdot x+C=0$~~

~~$\rightarrow y^3\cdot x+y^3\cdot 2+y^2\cdot x-\frac{x^3}{3}=0 \rightarrow y^2\cdot(yx+2y+x)-\frac{x^3}{3}+C=0$~~ (ŠPATNĚ, ALE ~~POSTUP VÍM~~)

$(y^2x+2y^2-\frac{x^3}{3}+C=0)$ V $M=[\overset{x}{3};\overset{y}{1}]$

$\rightarrow 1^2.3+2\cdot 1-\frac{3\cdot 3\cdot 3}{3}+C=0 \qquad 3+2-9+C=0 \rightarrow \underline{C=4}$

ROV. F.T. V M: $y^2x+2y^2-\frac{x^3}{3}+4=0 \qquad h_{(x,y)}=C$

$2y(x+2)dy-(x^2-y^2)\cdot dx=0=dh$ ~~$\frac{\partial h}{\partial x}=-\frac{x^3}{3}+y^2\cdot x+k(y)=h_{(x,y)}$~~ $\left(\frac{\partial h}{\partial y}=2yx+4y\right)$

~~$\Rightarrow\frac{\partial h}{\partial y}=0\ \frac{y^3\cdot x}{3}+\frac{k(y)}{dy}=2yx+4y \Rightarrow k_y=\left(2yx+4y-\frac{y^3x}{3}\right)dy=y^2x+2y^2-\frac{y^4}{12}$~~

$\frac{\partial h}{\partial y}=(2yx+4y) \rightarrow h_{(x,y)}=y^2x+2y^2+k_x \rightarrow \frac{\partial h}{\partial x}=\cancel{y^2}+0+\frac{k_x}{dx}=-x^2+\cancel{y^2}$

$\Rightarrow k_x=-x^2dx=-\frac{x^3}{3} \rightarrow h_{(x,y)}=y^2x+2y^2-\frac{x^3}{3}=C \quad C\in R$

V M: $1^2\cdot 3+2\cdot 1^2-9=C=-4 \qquad y^2x+2y^2-\frac{x^3}{3}=-4=h_{(3,1)}$

$\Rightarrow \underline{y^2x+2y^2-\frac{x^3}{3}+4=0}$

MATIKA 16/17 $\boxed{4}$

FCE: $f(x,y)=2xy-x^2-3y^2+4y$

① **EXISTENCE A ABS EXTRÉMY:** NA ÚSEČCE $M=\{[x,y]\in E_2;\ y=1-x;\ -1\leq x\leq 1\}$

• FCE JE SPOJITÁ • ÚSEČKA (INTERVAL/MNOŽINA) M JE UZAVŘENÝ A OMEZENÝ $x\in\langle -1;1\rangle$

M -> DO FCE: $f(x;1-x)=2x-2x^2-x^2-(3x^2-6x+3)+4=-6x^2+8x+1 \ (=g(x))$ ~~$+4x$??~~

KRIT. BODY: $g'(x)=0=-12x+4 \rightarrow 12x=4 \rightarrow 3x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{3}$

X	g(x)			
-1	~~$-6-8+1=-13$~~	MIN	$f(-1;2)=$	~~MAJ RAM FUCK UP~~
$1/3$	~~$-\frac{2}{3}+\frac{8}{9}+1=\frac{-6+8+9}{9}=\frac{11}{9}$~~	—	$f(\frac{1}{3};\frac{2}{3})=$	~~URČO UMÍM~~
1	~~$-6+8+1=3$~~	MAX	$f(1;0)=-1+4=3$	NEMAJ, OFN NEUMÍM OPSAT ZADÁNÍ, ALE EZ.

② $f(x)=\ln(2x+1)-\frac{x}{2}$ a) **1. a 2. DER + ROVNICE TEČNY** v $[\overset{x_0}{0};\overset{y_0}{f(x_0)}]$ $f(x_0)=0$, $f'(x_0)=\frac{3}{2}$

$f'(x)=\frac{1}{(2x+1)}\cdot 2-\frac{1}{2}=\frac{2}{(2x+1)}-\frac{1}{2}$ $f''(x)=\frac{-2}{(2x+1)^2}\cdot 2=\frac{-4}{(2x+1)^2}$ $\boxed{y-y_0=f'(x)\cdot(x-x_0)}$

ROVNICE TEČNY: $y=\frac{3}{2}\cdot(x-0)+0=\frac{3}{2}x$ $f''(x_0=0)=-4$

b) **T2 O STŘEDU $x_0=0$; $f(x=\frac{1}{2})$** $T_2(x)=0+\frac{3}{2}\cdot(x-0)-\frac{4}{2}(x-0)^2=\frac{3}{2}x-2x^2$

$f(\frac{1}{2})\doteq T(\frac{1}{2})=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}-2\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{4}-\frac{2}{4}=\frac{1}{4}$ $f'''(x)=\frac{16}{(2x+1)^3}$ $f'''(x_0)=16$

c) **$R_3(x)$ + ODHAD CHYBY:** $R_3(x)=\frac{f'''(\xi)}{3!}\cdot(x-x_0)^3=\frac{8\cdot\cancel{2}}{3\cdot\cancel{2}(2\cdot\xi+1)^3}\cdot(x^3)$ ξ LEŽÍ MEZI x_0 A x

$R_3(\frac{1}{2})\left|\begin{matrix}x=\frac{1}{2}\\ \xi=x_0\end{matrix}\right|\leq\frac{8}{3\cdot 1}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)\leq\frac{1}{3}$ $R_3\leq\left|\frac{1}{3}\right|$

③ $A=\begin{pmatrix}3&1&0\\-13&-1&0\\4&-8&-2\end{pmatrix}$ a) **VL. Č.:** $0=\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}3-\lambda&1&0\\-13&-1-\lambda&0\\4&-8&-2-\lambda\end{vmatrix}=$ ~~$[(3-\lambda)\cdot(-1-\lambda)\cdot(-2-\lambda)]-(-13\cdot(-2-\lambda))=0$~~

~~$(-2-\lambda)\cdot(-3-3\lambda+\lambda+\lambda^2)-26-13\lambda=0$~~ $\begin{vmatrix}3-\lambda&1\\-13&-1-\lambda\end{vmatrix}\cdot(-2-\lambda)\cdot(-1)^{3+3}=|\ldots|\cdot(-2-\lambda)\cdot 1$!

$\Rightarrow(-2-\lambda)\cdot[(\lambda^2-2\lambda-3)+13]=(-2-\lambda)\cdot(\lambda^2-2\lambda+10)=0$ $\frac{2\pm\sqrt{4-40}}{2}$ $\rightarrow -40=40\cdot -1$

$\frac{2\pm 6i}{2}\Rightarrow\lambda_1=-2$ $\lambda_{2,3}=1\pm 3i$

b) **SPEKTRÁLNÍ POLOMĚR** $\boxed{\rho(A)=\max\{|\lambda_1|;|\lambda_2|;|\lambda_3|\}}$ TVL NVM $(\rho(A)=\sqrt{10})$

c) **VL. VEKTORY PRO $\lambda_1=-2$:** $\boxed{(A-\lambda E)\cdot\vec{x}=0;\ \vec{x}\neq 0}$

$\begin{pmatrix}5&1&0\\-13&1&0\\4&-8&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$
$5x+y=0$
$-13x+y=0$
$4x-8y=0$

$\left.\begin{matrix}x=0\\y=0\end{matrix}\right\}\ \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ $p\in R-\{0\}$

$z=p$

④ PLOCHA $Q=\{[x,y,z]\in E_3;\ z=4-x^2-y^2;\ z\geq 0\}$ a) PARAMETRIZACE + KOLMÝ VEKTOR K PLOŠE

$\boxed{\iint_Q \vec{f}\cdot d\vec{p} = \iint_Q \vec{f}\cdot\vec{n}^0\, dp}$; $Q: z=4-x^2-y^2 \rightarrow x^2+y^2\leq 4$

$\boxed{\vec{n}=\pm\left(\frac{\partial z}{\partial x};\frac{\partial z}{\partial y};-1\right)} = \pm(-2x;-2y;-1)$ $\vec{n}\cdot\vec{k}>0$

$\Rightarrow \vec{n}=(2x,2y,1)$

= KOLMÝ VEKTOR

POLÁRNÍ SOUŘ.:

$x=r.\cos\varphi$

$y=r.\sin\varphi$

MEZE

$\varphi\in\langle 0;2\pi\rangle$

$r\in\langle 0;2\rangle$

NĚJAK ZJISTÍM $\vec{n}^0=\frac{(2x,2y,1)}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}$

$\Rightarrow \iint_{x^2+y^2\leq 4}(4-x^2-y^2)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^2(4-r^2)r\,dr\right)d\varphi = 8\pi$

b) TOK

b) TOK: $\vec{f}(y,-x,z)$ PLOCHOU S $\vec{k}=(0,0,1)$:

c) TOK VEKT. POLE $\vec{f}$ PLOCHOU σ = POVRCH TĚLESA $M=\{[x,y,z]\in E_3;\ 0\leq z\leq 4-x^2-y^2\}$ POMOCÍ GAUSS-OSTROGRADS. VĚTY

$\boxed{\iint_\sigma \vec{f}\,d\vec{p} = \iiint_M dx\,dy\,dz}$ $\frac{+4\pm\sqrt{16-20}}{2\cdot 1}=\frac{4\pm 2\cdot i}{2}=2\pm i$ $\lambda_1=2+i$ $\lambda_2=2-i$

⑤ $\ddot{x}-4\dot{x}+5x=0$: $\rightarrow \lambda^2-4\lambda+5=0$ $\boxed{\alpha\pm\beta i=\lambda_{1,2}: \text{F.S.R.}: \{e^{\alpha\cdot t}\cdot\cos\beta t;\ e^{\alpha\cdot t}\cdot\sin\beta t\}}$

FSR: $\{e^{2t}\cdot\cos t;\ e^{2t}\cdot\sin t\}$ $x_H(t)=c_1\cdot e^{2t}\cdot\cos t+c_2\cdot e^{2t}\cdot\sin t$ $t\in R$

b) $f(t)=e^{2t}+\cos t$: $\boxed{f=f_1+f_2}$ $f_1=e^{2t}$ ODHAD: (OSHOD) $x_{P1}=A\cdot e^{2t}$; $\dot{x}_{P1}=2Ae^{2t}$; $\ddot{x}=4Ae^{2t}$

$4Ae^{2t}-4\cdot 2Ae^{2t}+5\cdot Ae^{2t}=e^{2t}$ $Ae^{2t}=e^{2t}$ $A=1$

$f_2=\cos t$ ODHAD $x_{P2}=A\cdot\cos t+B\cdot\sin t$; $\dot{x}_{P2}=-A\sin t+B\cos t$; $\ddot{x}_{P2}=-A\cdot\cos t-B\cdot\sin t$

$-A\cos t-B\sin t+4.A\sin t-4B\cos t+5A\cos t+5.B\sin t=4A\cos t+4A\sin t+4B\sin t-4B\cos t=(4A-4B).\cos t+(4A+4B).\sin t$

$\Rightarrow 4A-4B=1;\ 4A+4B=0\rightarrow A=-B\Rightarrow 4A+4A=1\Rightarrow A=\frac{1}{8}\quad B=-\frac{1}{8}$ $\underset{1}{\underset{\parallel}{a\cdot\cos t}}$ $\underset{0}{\underset{\parallel}{b\cdot\sin t}}$

$x_P=x_{P1}+x_{P2}=1\cdot e^{2t}+\frac{1}{8}\cdot(\cos t-\sin t)$ $x(t)=x_H(t)+x_P(t)$

⑥ AUTONOM. SOUSTAVA: $\underbrace{\dot{x}=x^2-y^2}_{P(x,y)}$; $\underbrace{\dot{y}=-2x(y+1)}_{Q(x,y)}$ a) FÁZOVÁ ROVINA A F. TRAJEKTORIE

$J=\begin{pmatrix}\frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y}\\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x & -2y\\ -2(y+1) & -2x\end{pmatrix}$ JSOU SPOJITÉ V E_2

b) IMPLICITNÍ TVAR FÁZOVÝCH TRAJEKTORIÍ. ROVNICE V BODĚ $M=[1;0]$ $\frac{dy}{dx}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{-2x(y+1)}{x^2-y^2}\rightarrow\int(x^2-y^2)\,dy=\int(-2x(y+1))\,dx\rightarrow(x^2-y^2)dy+2x(y+1)dx=0$

JE EXAKTNÍ PROTOŽE: $\left(\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial(-Q)}{\partial y}\right)=2x$ $\boxed{\text{OBECNÉ ŘEŠENÍ } h(x,y)=C}$ $dh=(x^2-y^2)dy+2x(y+1)dx$

$\frac{\partial h}{\partial x}=2xy+2x\rightarrow h_{(x,y)}=\frac{2}{2}x^2\cdot y+\frac{2}{2}x^2+k_{(y)}$ *

* $\frac{\partial h}{\partial y}=x^2\cdot 1+0+\frac{k(y)}{dy}=x^2-y^2\Rightarrow K_{(y)}=-y^2dy$ $\frac{\partial h}{\partial y}=x^2-y^2 \Leftarrow$ (K JAKO C, PAK h PARC. ZDERIVUJI PO TOM DRUHÉM A = S PŮVODNÍ PARC

$\Rightarrow k_{(y)}=-\frac{y^3}{3}\xrightarrow{\text{do } h(x,y)} h_{(x,y)}=x^2\cdot y+x^2-\frac{y^3}{3}=C\quad c\in R$; $h_{(1,0)}=1^2\cdot(0+1)-0=1$

c) BODY ROVNOVÁHY: $P_{(x,y)}=0$, $Q_{(x,y)}=0$ $-2x\cdot(y+1)=0\rightarrow \underset{①}{x=0}\quad \underset{②}{y=-1}$

$x^2-y^2=0$ ① $\rightarrow y=0$

- [0;0] ①
- [1;-1] ②
- [-1;1] ②

$\Longleftarrow$ ② $\rightarrow x^2-1=0\rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm 1$

ČÁSTI STROJŮ, TECHNOLOGIE A MATERIÁLY

1. Pohybové šrouby, závitové spoje.
   Kinematické, silové a energetické poměry na závitu. Poměry při utahování a povolování šroubového spoje. Návrh a pevnostní kontrola šroubu. Dynamicky namáhaný závitový spoj, pracovní diagram. Dimenzování při cyklickém namáhání.

2. Silové a tvarové spoje náboje a hřídele.
   Princip přenosu sil v nalisovaném a svěrném spoji, rozložení kontaktních tlaků. Návrh a pevnostní kontrola nalisovaného spoje. Návrh a konstrukční řešení spoje perem, drážkováním, kolíkem a čepem. Tolerování rozměrů spoje. Způsob namáhání a pevnostní kontrola staticky namáhaných svarů. Technologie výroby, označování svarů ve výkresové dokumentaci, materiály vhodné pro svařované konstrukce.

ČMS

3. Převody klínovými řemeny a řetězy. Ozubené převody.
   Návrh a kontrola použitého řemenu nebo řetězu. Rozbor silových poměrů v klínové drážce. Provozní předpětí klínového řemenu. Konstrukce součástí řetězového převodu. Ukládání řemenic a řetězových kol na hřídele. Geometrie ozubených kol s přímými a šikmými zuby, zobrazování ozubených kol. Podřezání zubu, korigování ozubených kol. Silové a kinematické poměry u kol se zuby přímými a šikmými. Základy pevnostního výpočtu.

4. Osy a hřídele Hřídelové spojky
   Konstrukce, používané normalizované prvky, materiály. Návrh rozměrů, pevnostní a deformační kontroly. Uložení ve valivých ložiskách. Rozměry ložisek, únosnost, životnost a návrh ložiska. Uložení hřídele v ložisku. Konstrukce a použití spojek pevných, pružných a zubových. Dimenzování a konstrukční výpočty.

5. Technologie plošného tváření Technologie gravitačního odlévání
   Základní charakteristika, vyjmenujte technologie plošného tváření, používané tvářecí stroje a výpočty sil v plošném tváření. Klady a zápory pro použití technologie plošného tváření.
   Popište metody gravitačního odlévání, jejich principy, specifika, charakter modelového zařízení, charakter formy, odlévané materiály. Uveďte orientačně dosažitelné parametry, sériovost.

6. Svařování el. obloukem v ochranných atmosférách
   Popište rozdělení metod svařování v ochranných atmosférách a jejich principy, typy používaných ochranných plynů a jejich účel, typy elektrod a přídavných materiálů, hlavní parametry svařování. Možnost použití jednotlivých metod.

T1

7. Technologie povrchových úprav
   Technologie povrchových úprav, účel. Koroze – dělení dle druhu korozních dějů, dle reakčního prostředí, dle formy napadení. Ochrana proti korozi, elektrochemická ochrana. Mechanické předúpravy povrchu, chemické (elektrochemické) předúpravy povrchu. Rozdělení povrchových úprav – anorganické povlaky (kovové, nekovové), organické povlaky.

8. Obrábění
   Teorie obrábění, řezné nástroje, výrobní, nekonvenční a dokončovací technologie, technologie obrábění na CNC strojích, programování CNC strojů.

T2

9. Projektování. Metrologie
   Normování časů, tvorba výrobních postupů, ekonomické hodnocení volby strojů, optimalizace řezných podmínek, výpočty řezných podmínek při obrábění Měřicí metody, přesnost měření, komunální měřidla, délkoměry, souřadnicové měření.

10. Mechanické zkoušky materiálu.
    Zkouška tahem, tlakem, ohybem. Zkoušky tvrdosti. Zkouška rázem v ohybu. Zkoušky únavy, creep.

11. Základní technické materiály, jejich vlastnosti, struktura, použití.
    Oceli, litiny, plasty, kompozity, keramika.

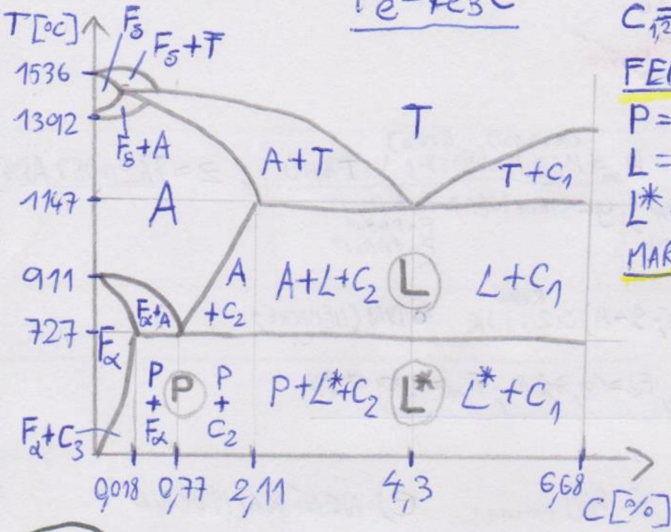
MAT.

12. Zpracování ocelí
    Základní způsoby tepelného zpracování, chemicko-tepelného a tepelně-mechanického zpracování.

ČMS: OTÁZKY → 10 b /100
T1/T2 → 5 b + 5b priklad
MAT: → ~~5,5b~~ 10 b.
30b/100

MATERIÁLY $\boxed{11}$

Fe-Fe3C



T = TAVENINA

A = AUSTENIT = TUHÝ ROZTOK C V F_γ

$C_{1,2,3}$ = CEMENTIT (PRIMÁRNÍ / SEKUNDÁRNÍ / TERCIÁRNÍ) = KARBID ŽELEZA (Fe_3C) INTERMEDIÁRNÍ FÁZE

FERIT (F) α, γ, δ = INTERSTICIÁLNÍ TUHÝ ROZTOK UHLÍKU V ŽELEZE K8

P = PERLIT = SMĚS FERITU A CEMENTITU

L = LEDEBURIT = EUTEKTIKUM (= TUHÁ SMĚS) SOUSTAV Fe-Fe_3C

L* = TRANSPONOVANÝ LEDEBURIT

MARTENZIT = PŘESYCENÝ TUHÝ ROZTOK C V ŽELEZE S JEMNOU STRUKTUROU

MEZ KLUZU $R_e=\frac{F_e}{S_0}$ [MPa]

TAŽNOST $A=\frac{L_u-L_0}{L_0}\cdot 100$ [%]

MEZ PEVNOSTI $R_m=\frac{F_m}{S_0}$ [MPa]

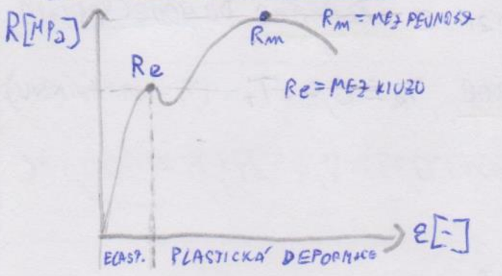
KONTRAKCE $Z=\frac{S_0-S_u}{S_0}\cdot 100$ [%]

(13/14) • OCEL ČSN 11375 (S235JRG2) NELEGOVANÁ (MAX 0,17%C) PODROBENA TAHOVÉ ZKOUŠCE

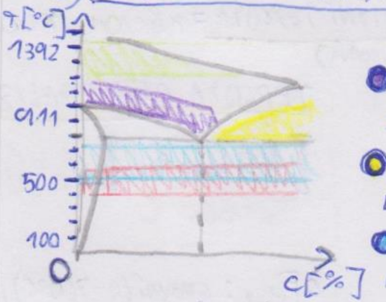
ZKUŠEBNÍ TYČ $d_0=14$ mm ; $F_e=36{,}2$ kN ; $F_m=65{,}9$ kN ; TVRDOST 129 HV

a) MEZ PEVNOSTI: $\boxed{R_m=\frac{F_m}{S_0}}$ $S_0=\frac{\pi\cdot d^2}{4}=49\cdot\pi$ $R_m=\frac{65900}{49\pi}=428$ MPa

b) SMLUVNÍ TAHOVÝ DIAGRAM:



c) NORMALIZAČNÍ ŽÍHÁNÍ:



- HOMOGENIZAČNÍ: (1000-1200 °C) VYROVNÁNÍ CHEMICKÝCH NESTEJNORODOSTÍ; ZHRUBNE A ZRNO
- NORMALIZAČNÍ: (750-900 °C) F+P ZJEMNĚNÍ AUSTENITICKÉHO ZRNA -> LEPŠÍ VLASTNOSTI
- NA MĚKKO: (650-720 °C) SNÍŽENÍ PEVNOSTI -> LEPŠÍ OBROBITELNOST. Δ LAMINÁRNÍ -> ZRNITÝ PERLIT
- REKRYSTALIZAČNÍ: (550-700 °C) MĚNÍ SE VAZBY MEZI ATOMY, NIKOLIV VŠAK MŘÍŽKA. RŮST NOVÝCH ZRN.
- KE SNÍŽENÍ PNUTÍ: (600-630 °C) PO SVAŘ., OBRÁBĚNÍ. POMALÝ OHŘEV I CHLADNUTÍ

d) MĚŘENÍ TVRDOSTI:

ROCKWELL: • HRA (KUŽEL, 600N) • HRB (KULIČKA; 1000N) • HRC (KUŽEL; 1500N) 48 HRC

VICKERS: • HV (JEHLAN) 185 HV 30 = 185 TVRDOST PŘI 30 kp $\boxed{1\,kp = 9{,}81\,N}$

BRINELL: • HBW (KULIČKA) 350 HBW 5/50 = 350 TVRD. PŘI Ø5 KULIČKY A ZATÍŽENÍ 50 kp

e) KALITELNOST = SCHOPNOST DOSÁHNOUT KALÍCÍCH STRUKTUR (= AUSTENIT -> MARTENZIT ; PRO OCELI NAD 0,4%C !

ZAKALITELNOST = SCHOPNOST OCELI DOSÁHNOUT PO KALENÍ ZVÝŠENÍ TVRDOSTI. (JÁDRO ALESPOŇ 50% MARTENZITU)

PROKALITELNOST = DEFINUJE HLOUBKU ZAKALENÍ ; FAKTORY: Ⓐ OBSAH C Ⓑ VELIKOST AUST. ZRNA Ⓒ LEGUJÍCÍ PRVKY

(14/15) • OCEL X10Cr13 SLOŽENÍ (0,1%C; 0,8%Mn; 0,7%Si; 13%Cr) ZUŠLECHTĚN NA DOLNÍ PEVNOST

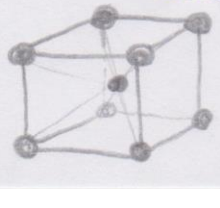
TVRDOST 222 HB ; TAH. ZK. TYČ $d_0=10$ mm ; $l_0=50$ mm ; $F_{p0,2}=33{,}4$ kN ; $F_m=56{,}5$ kN ; $l_u=60{,}1$ mm

a) MEZ PEVNOSTI: $S_0=25\pi$ $R_m=\frac{F_m}{S_0}=719{,}4$ MPa TAŽNOST: $\boxed{A=\frac{l_u-l_0}{l_0}}=\frac{60{,}1-50}{50}=0{,}202$

b) JAKÁ JE TO OCEL? := NEREZOVÁ / CHROMOVÁ KOROZIVZDORNÁ -> VYSOKÝ OBSAH Cr

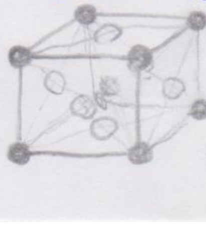
d) MŘÍŽKY: (KOVŮ)

K8: KUBICKÁ TĚLESNĚ STŘEDĚNÁ

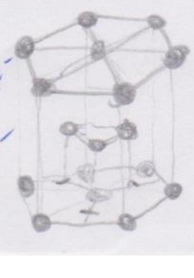


K12: KUBICKÁ PLOŠNĚ STŘEDĚNÁ

! NEMÁ TEN UPROSTŘED



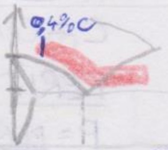
H12: ŠESTEREČNÁ TĚSNĚ USPOŘÁDANÁ



e) ZUŠLECHŤOVÁNÍ := DOSAŽENÍ VYŠŠÍ MEZE KLUZU A PEVNOSTI PŘI VYSOKÉ HOUŽEVNATOSTI POMOCÍ KOMBINACE KALENÍ A VYSOKOTEPLOTNÍHO POPOUŠTĚNÍ (400-650°C

(15/16) OCEL C45 ⇒ 0,45 % C

b) KALÍCÍ TEPLOTY V $Fe-Fe_3C$: 800-860°C



(17/18) ZNAČENÍ LITIN: $\boxed{EN-GJxy-R_m-Z}$ R_m = $\overset{(MINIMÁLNÍ)}{MEZ}$ PEVNOSTI V TAHU [MPa] ; Z = TAŽNOST A[%]

G = MATERIÁL NA ODLITKY
J = LITINA

X = TVAR GRAFITU: L-LUPÍNKOVÝ
S-KULIČKOVÝ
...

y = STRUKTURA: A-AUSTENIT
F-FERIT
P-PERLIT
...

ZNAČENÍ OCELÍ: ● ČSN (TŘÍDY 10-19) $11\overset{R_m MIN 370}{\underline{373}}$ = ● EN (EVROPSKÉ; S-M) $S\overset{R_e MIN}{\underline{235}}JR$ ● DIN (NĚMECKÁ;

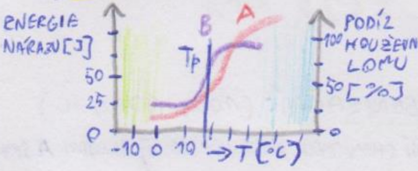
(18/19) ● OCEL S235JRG1 (MAX 0,17% C); $d_0=10mm$, $F_e=19,72N$; $F_m=29,92N$

MINIMÁLNÍ NÁRAZOVÁ PRÁCE $KV_{MIN}=27J$

d) DÉLKA POMĚRNÉ ZKUŠEBNÍ TYČE?: $\boxed{L_0=5,65\cdot\sqrt{S_0}} \doteq 50mm$ e) NENÍ KALITELNÁ

f) SVAŘITELNOST?: OBSAH C DO 0,2%, NELEGOVANÉ ⇒ JE SVAŘITELNÁ

g) ZKOUŠKA RÁZEM V OHYBU – CHARPYHO KLADIVO; VRUB U/V



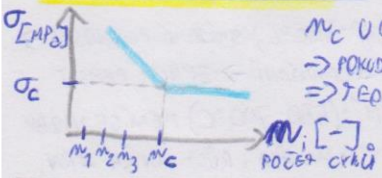
HOUŽEVNATÝ LOM – MATNÝ

KŘEHKÝ LOM – LESKLÝ

KV = ABSORBOVANÁ ENERGIE PŘI NÁRAZU

T_P = TRANZITNÍ TEPLOTA (PŘECHODOVÁ) = KDY LOM PŘECHÁZÍ Z KŘEHKÉHO DO HOUŽEVNATÉHO

WÖHLEROVA KŘIVKA:



n_c U OCELÍ = 10^7 CYKLŮ
→ POKUD VYDRŽÍ PŘI σ_c
⇒ TEORETICKY VYDRŽÍ $n=\infty$

TEPLOTA REKRYSTALIZACE $T_R \doteq 0,4\cdot T_T$ (T_T = TEPL. TÁNÍ KOVU)

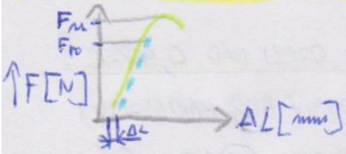
!ALE V [K]! $T_R=(660+273,15)\cdot0,4-273,15=100,1°C$

$T_T=660°C$

ALOTROPNÍ MODIFIKACE ČISTÉHO ŽELEZA:

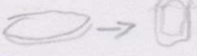
- Fe_α: STABILNÍ (0-760°C), K8
- Fe_β: ST. 760-911°C, K8, ZTRÁTA FEROMAGNETISMU
- Fe_γ: 911-1392°C, K12, PARAMAGNETICKÁ
- Fe_δ: 1392-1536°C, K8

PRACOVNÍ TAHOVÝ DIAGRAM: $F=f(\Delta L)$

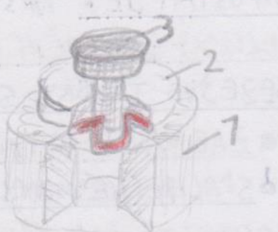


T1 (13/14) [1]

Z PLECHU $\varnothing D=200mm$; $t=1,2mm$; $R_m=340MPa$ (NÍZKOUHLÍKOVÁ OCEL) JE 2MA TAHY TAŽEN VÝLISEK



SOUČINITELE TAŽENÍ: $m_1=0,6$; $m_2=0,8$



① 3 HLAVNÍ ČÁSTI TAŽNÉHO NÁSTROJE: ¹• TAŽNICE ²• PŘIDRŽOVAČ ³• TAŽNÍK

② ⌀ VÝTAŽKU PO 1. A 2. TAHU: $\boxed{m_1=\frac{d_1}{D};\ m_2=\frac{d_2}{d_1}}$ $\Rightarrow d_1=m_1\cdot D=120mm$

$d_2=m_2\cdot d_1=96mm$

③ VÝŠKA ~~TAHU~~ PO 1. A 2. TAHU: $\boxed{V=\frac{\pi\cdot D^2}{4}\cdot h}$ $\rightarrow V_0 \doteq 37699\ mm^3$ $\quad 120-2\cdot 1,2=d_{d1}=117,6$

$\boxed{t=t_p \quad V=V_p}$

$\boxed{1.\text{TAH}}$ $V_{1DNO}=13034$ $V_{1KRAJ}=V_0-V_{1DNO}=24665$  $=\left(\frac{\pi\cdot d_1^2}{4}\cdot h_1\right)-\left(\frac{\pi\cdot d_{d1}^2}{4}\cdot h_1\right) \Rightarrow h_1 \doteq 55mm$

④ POTŘEBNÁ SÍLA LISU PRO OBA TAHY: $\boxed{F=R_m\cdot d\cdot t\cdot\pi}$ $(F_1=153812N)$

(16/17)

VÝTAŽEK $d=\varnothing 100mm$ $h=140mm$ $t=1mm$ $R_m=350MPa$ $m_1=\frac{d_1}{D}=0,6$ $m_n=\frac{d_n}{d_{n-1}}=0,8$

② POLOTOVAR? $\boxed{t=t_p;\ V=V_p}$ $V_{VÝT}=\left(\frac{\pi\cdot 100^2}{4}\cdot 140\right)-\left(\frac{\pi\cdot 98^2}{4}\cdot 140\right)+\left(\frac{\pi\cdot 98^2}{4}\cdot 1\right)=51085,438\ mm^3$

$V_{VÝT}=V_{POL}=\frac{\pi\cdot D^2}{4}\cdot 1 \Rightarrow D=\sqrt[2]{\frac{V_{VÝT}\cdot 4}{\pi}}=255mm$

③ POTŘEBNÝ POČET TAHŮ: $d_1=m_1\cdot D=153mm$ $m_2=\frac{d_2}{d_1}=0,8$ $d_2=m_2\cdot d_1=122,4$ $d_3=98mm$

$\Rightarrow$ 3 TAHY $d_3 \doteq d$

④ NEJVĚTŠÍ SÍLA: $\boxed{F=R_m\cdot d_1\cdot t\cdot\pi}$

(14/15)

- LICÍ TEPLOTA LITIN: 1250 - 1400 °C
- VÁPENEC SE PŘI TAVENÍ LITIN PŘIDÁVÁ: ZLEPŠENÁ TEKUTOST STRUSKY A VÁZÁNÍ SÍRY
- POTÍŽE PŘI VÝROBĚ LITINY S KUL. GRAF. POMOCÍ $\boxed{Mg}$ ZPŮSOBUJE: NÍZKÁ TEPLOTA VARU $\boxed{Mg}$ A VYSOKÁ AFINITA K $\boxed{O_2}$ A $\boxed{S}$
- NÁLITEK SLOUŽÍ K: ÚHRADĚ OBJEMOVÝCH ZMĚN SLITINY PŘI TUHNUTÍ
- NEJLEPŠÍ TVAŘITELNOST VYKAZUJÍ SLITINY: S HOMOGENNÍ (JEDNOFÁZOVOU) STRUKTUROU
- SOUČINITEL TAŽENÍ VÁLCOVÝCH VÝTAŽKŮ: $m_n=\frac{D_n}{D_{n-1}}$
- MAX. TEPLOTA KYSLÍKO-ACETYLENOVÉHO PLAMENE: 3150 °C
- METODA TIG (WIG): NEODTAVUJÍCÍ SE WOLFRAMOVÁ ELEKTRODA V ATMOSFÉŘE INERTNÍHO PLYNU
- PO ŽÍHÁNÍ NA ODSTRANĚNÍ PNUTÍ, JE SVAŘENEC OCHLAZOVÁN: PROUDEM VZDUCHU / V PECI (POMALÉ CHLADNUTÍ)?
- PRO ŽÁROVÉM POKOVENÍ OCELÍ V LÁZNI JE NEJČASTĚJŠÍ: ZINEK (PŘI 450 °C)

(15/16) [A]

- OPTIMÁLNÍ LICÍ t SLITIN HLINÍKU DO PÍSKOVÝCH FOREM: 690 - 730 °C
- OCEL NA ODLITKY SE VE SLÉVÁRNĚ TAVÍ V: OBLOUKOVÉ PECI
- OČKOVÁNÍ LITIN S LUPÍNKOVÝM GRAFITEM JE: ÚPRAVA KOVU TĚSNĚ PŘED LITÍM DODÁNÍM KRYSTALIZAČNÍCH ZÁRODKŮ
- METODA TLAKOVÉHO LITÍ SE VYUŽÍVÁ PRO: ODLITKY ZE SLITIN HLINÍKU, HOŘČÍKU A ZINKU
- TVÁRNOST UHLÍKOVÝCH OCELÍ STOUPÁ S: KLESAJÍCÍM OBSAHEM UHLÍKU
- ZARUČENĚ SVAŘITELNÉ OCELI JSOU: S OBSAHEM UHLÍKU DO 0,22 %
- PŘI SVAŘOVÁNÍ POD TAVIDLEM JE ZDROJEM TEPLA: ELEKTRICKÝ OBLOUK
- K PROTIKOROZNÍMU ŽÁROVÉMU STŘÍKÁNÍ SE POUŽÍVAJÍ KOVY: $\boxed{Al}$ $\boxed{Zn}$

[B]

- PŘI HLUBOKÉM TAŽENÍ VZNIKAJÍ V PŘÍRUBĚ VÝTAŽKU NAPĚTÍ ZPŮSOBUJÍCÍ: TVORBU VLN V PŘÍRUBĚ
- OCHRANNÁ ATMOSFÉRA JE PŘI MAG Z: CO_2
- PODMÍNKA ŘEZATELNOSTI MATERIÁLU KYSLÍKEM: ZÁPALNÁ t KOVU $\overset{!}{\lesssim}$ t TAVENÍ KOVU
- ELOXOVÁNÍ JE: ELEKTROCHEMICKÁ POVRCHOVKA PRO HLINÍK

(17/18) $\boxed{A}$ - POJIVO FORMOVACÍCH SMĚSÍ NA SYROVO JE VĚTŠINOU: NAVLHČENÝ JÍL
- STAŽENINA JE VADA ODLITKU VZNIKLÁ: ZMĚNOU OBJEMU BĚHEM TUHNUTÍ
- ZÁPUSTKA JE: NÁSTROJ PRO SÉRIOVOU VÝROBU VÝKOVKŮ
- VELIKOST ZPEVNĚNÍ PŘI TVÁŘENÍ ZÁVISÍ NA: TEPLOTĚ A VELIKOSTI DEFORMACE
- BEZEŠVÉ TRUBKY SE VYRÁBÍ: KOSÝM VÁLCOVÁNÍM NEBO PROTLAČOVÁNÍM

$\boxed{B}$ - ZABÍHAVOST SLITIN SE MĚŘÍ: DÉLKOU ODLITÉHO ZKUŠEBNÍHO ODLITKU VE TVARU TYČEK NEBO SPIRÁLY
- SPALITELNÉ MODELY PRO TVORBU FOREM JSOU Z: PĚNOVÝCH PLASTŮ
- VELIKOST PŘETVÁRNÉHO ODPORU PŘI TVÁŘENÍ ZA STUDENA SE VZRŮSTAJÍCÍ DEFORMACÍ: STOUPÁ
- PŘIDRŽOVAČ PŘI HLUBOKÉM TAŽENÍ SLOUŽÍ K: ZABRÁNĚNÍ VZNIKU VLN A PŘELOŽEK V OBLASTI PŘÍRUBY
- HLAVNÍ FUNKCE VÝRONKU: REGULACE POHYBU MATERIÁLU V ZÁPUSTCE A ZACHYCENÍ PŘEBYTEČNÉHO KOVU

(18/19) $\boxed{A}$ - LINEÁRNÍ SMRŠTĚNÍ ODLITKŮ Z LITINY S LUP. GR. PŘI CHLADNUTÍ JE CCA: 1%

$\boxed{B}$ - PRO ODSTRANĚNÍ $\boxed{S}$ Z OCELI PŘI TAVENÍ V OBLOUK. PECI JE NUTNÁ: DOBRÁ DEZOXIDACE A ZÁSADITÁ STRUSKA
- TVÁŘENÍM ZA TEPLA SE ROZUMÍ: TVÁŘENÍ NAD TEPLOTOU REKRYSTALIZACE

T2 $\boxed{1}$

VZORCE

ŘEZNÁ RYCHLOST

$v_c = \frac{\pi \cdot D \cdot n}{1000}$ [m/min]

PRŮŘEZ ODŘEZÁVANÉ VRSTVY

$A_d = a_p \cdot f$ [mm²]

a_p = HLOUBKA TŘÍSKY
f = POSUV

ŘEZNÁ SLOŽKA SÍLY

$F_c = k_c \cdot A_d = \underset{\llcorner 4}{c_k} \cdot R_m \cdot A_d$ [N]

ŘEZNÝ VÝKON

$P_c = F_c \cdot \frac{v_c}{60}$ [W]

STROJNÍ ČAS

$t_{as} = \frac{60 \cdot L}{f \cdot n}$ [s]

PRÁCE

$Q = P_c \cdot t_{as}$ [J]

ÚBĚR MATERIÁLU

$\frac{v_c \cdot 10^3}{A_d \cdot 10^{-2}}$

$U = \frac{V_{MAT}}{t} \doteq A_d \cdot v_c \left[\frac{cm^3}{min}\right]$

OBJEMOVÝ SOUČ. TŘÍSKY

$W = \frac{V_{TŘÍSEK}}{V_{MAT}}$ [-]

TRVANLIVOST

$T = \frac{C_T}{v_c^{m}}$ [min] $\rightarrow v_c = \frac{C_v}{a_p^{x_v} \cdot f^{y_v} \cdot T^{\frac{1}{m_v}}}$

(13/14) D: $v_c = 210$; $f = 0{,}3$; $a_p = 5$; $R_m = 650$; $øD = 66{,}8$; $L = 200$

a) OTÁČKY: $v_c = \frac{\pi \cdot D \cdot n}{1000} \rightarrow n = \frac{v_c \cdot 1000}{\pi \cdot D} \doteq 1001$ ot/min

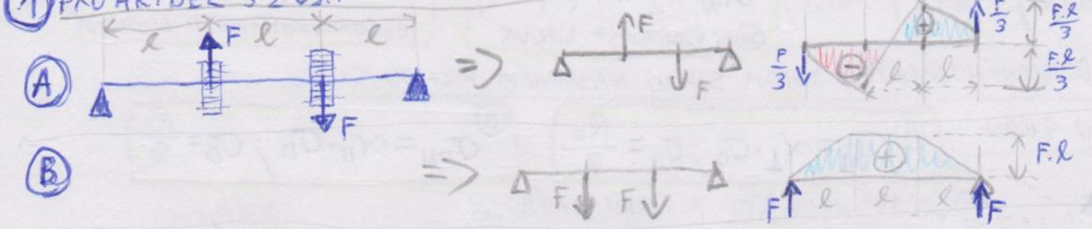
b) A_d: $A_d = a_p \cdot f = 1{,}5$ mm² c) F_c: $F_c = c_k \cdot R_m \cdot A_d = 4 \cdot 650 \cdot 1{,}5 = 3900$ N

d) $P_c \doteq F_c \cdot \frac{v_c}{60000}$ (JEDNOTKY) $= 13{,}65$ kW e) $t_{as} = \frac{60 \cdot L}{f \cdot n} = 40$ s f) $U := A_d \cdot v_c = 0{,}015 \cdot 21000 = 315$ cm^2/min

(14/15) D: v_c; f; a_p; R_m; $øD$; L U: n; A_d; F_c; P_c; t_{as}; U | (15/16) TAKT (+Q) | (16/17) | (17/18) | (18/19) (-U)

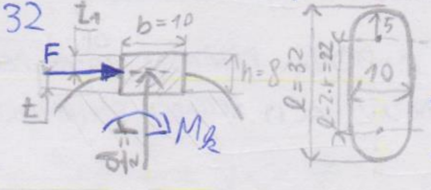
ČMS (13/14) $\boxed{1}$

① PRO HŘÍDEL S 2 OZ. KOLY MEZI LOŽISKY NAKRESLETE PRŮBĚH OHYBOVÉHO MOMENTU V ROVINĚ



② SPOJENÍ HŘÍDEL-NÁBOJ S TĚSNÝM PEREM, U: KONTAKTNÍ TLAK MEZI BOKEM PERA A DRÁŽKY PRO:

Ⓐ PERO 10 × 8 ; ℓ = 32
HŘÍDEL ⌀ 32
M = 70 Nm
= 70000 Nmm



$\boxed{t_1 = \frac{1}{2}h = 4\,mm}$ KONTAKTNÍ PLOCHA: $\boxed{S = t_1 \cdot (\ell - 2r) = 88}\,mm^2$

PŘENÁŠENÁ SÍLA: $\boxed{F = \frac{M_k}{r} = \frac{M}{\frac{d}{2}}} = \frac{70000}{16} = 4375\,N$

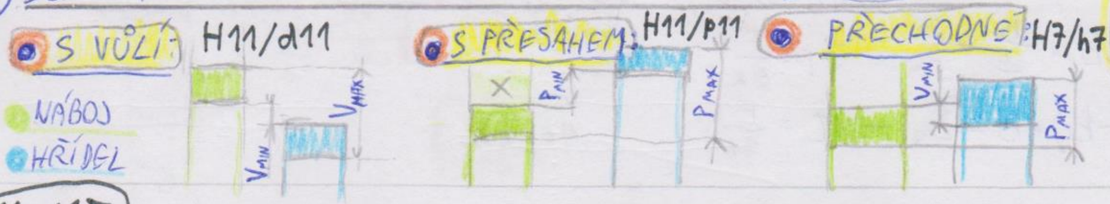
KONTAKTNÍ TLAK: $\boxed{p = \frac{F}{S}} = 49{,}716\,MPa\,[= N.mm^2]$

Ⓑ PERO 12 × 8 ; ℓ = 40 mm
⌀42 ; M = 160 000 Nmm

$S = 112\,mm^2$ $F = 7619{,}05\,N$ $p = 68{,}03\,MPa$

③ SCHÉMA TOLERANČNÍHO POLE PRO HŘÍDEL-NÁBOJ S PŘESAHEM

D = DÍRA / NÁBOJ
d = HŘÍDEL



(14/15)

① OZUBENÉ SOUKOLÍ S PŘÍMÝMI ZUBY:

Ⓐ
- MODUL = m = 2
- PŘ. POMĚR = i = 2,53
- POČ. ZUBŮ: $z_1 = 19$
- SOUČ. POSUNUTÍ PROFILU: $x_1 = +0{,}1$ $x_2 = 0$

$h_a^* = 1$, $c^* = 0{,}25$, $\alpha = 20°$

$\boxed{i = \frac{z_2}{z_1}} \rightarrow z_2 = i \cdot z_1 = 48$ $\boxed{d = m \cdot z} \Rightarrow d_1 = m \cdot z_1 = 38\,mm$; $d_2 = m \cdot z_2 = 96\,mm$

$\boxed{d_a = d + 2\,m \cdot h_a^* + 2\,m \cdot x} \Rightarrow \begin{array}{l} d_{a1} = 38 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 0{,}1 = 42{,}4\,mm \\ d_{a2} = 96 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + \cancel{2 \cdot 2 \cdot 0} = 100\,mm \end{array}$

$* \; a_w$

$\boxed{d_f = d - 2 \cdot m (h_a^* + c^*) + 2 \cdot m \cdot x} \Rightarrow \begin{array}{l} d_{f1} = 38 - 2 \cdot 2 \cdot (1 + 0{,}25) + 2 \cdot 2 \cdot 0{,}1 = 33{,}4\,mm \\ d_{f2} = 96 - 2 \cdot 2 \cdot (1{,}25) + \cancel{2 \cdot 2 \cdot 0} = 91\,mm \end{array}$

$\boxed{d_b = d \cdot \cos\alpha} \Rightarrow \begin{array}{l} d_{b1} = 38 \cdot \cos 20 = 35{,}708\,mm \\ d_{b2} = 96 \cdot \cos 20 = 90{,}21\,mm \end{array}$

$\boxed{a = \frac{1}{2}(d_1 + d_2)}$
$\boxed{a_w = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)}$

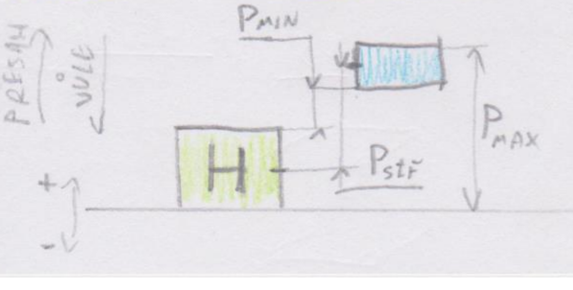
② NAVRŽENÍ NEJMENŠÍHO NUTNÉHO ⌀ HŘÍDELE PRO:

Ⓐ
- DOVOLENÉ NAMÁHÁNÍ V KRUTU: $\tau_D = 20\,N/mm^2$
- PŘENÁŠENÝ MOMENT: $M_K = 16\,Nm = 16\,000\,Nmm$

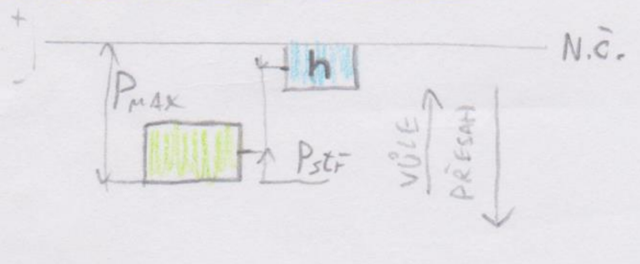
$\boxed{d = \sqrt[3]{\frac{16 M_k}{\pi \cdot \tau_D}}} \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 16000}{\pi \cdot 20}} = 15{,}97$

③ SCHÉMA T.P. S PŘESAHEM, VYZNAČ NEJVĚTŠÍ A STŘEDNÍ PŘESAH (P_{MAX}, $P_{stř}$)

Ⓐ SOUSTAVA JEDNOTNÉ DÍRY:



Ⓑ SOUSTAVA JEDNOTNÉHO HŘÍDELE:



15/16 OZUBENÉ SOUKOLÍ S PŘÍMÝMI ZUBY: $[h_a^* = 1 ; c^* = 0{,}25 , \alpha = 20°]$ VZORCE VIZ 14/15

- $m = 2$ • $i = 2{,}91$ • $z_1 = 20$ • $x_1 = +0{,}1$ • $x_2 = -0{,}1$

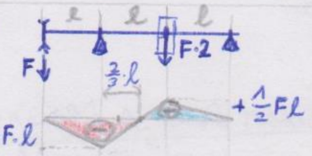
$\Rightarrow z_2 , d_1 , d_2 , d_{a1} , d_2 ; d_{a1,2} ; d_{f1,2} ; d_{b1,2} ;$ $\boxed{a_w = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (z_1 + z_2)}$ OSOVÁ VZDÁLENOST VALIVÁ $\boxed{a \doteq a_w \ (\text{PRO } x_1 = -x_2)}$ OSOVÁ VZDÁLENOST ROZTEČNÁ ✱

② Ⓐ VZTAH PRO URČENÍ VELIKOSTI DOVOLENÉHO NAPĚTÍ V TUPÉM SVARU NAMÁHANÉM KOLMOU SILOU

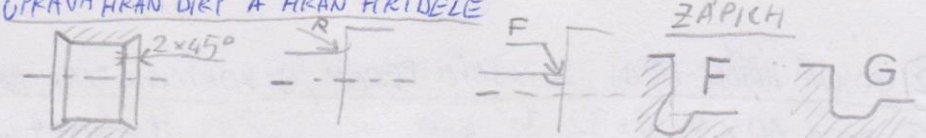
Ⓑ TOSAMO AKORÁT SOUBĚŽNOU SILOU

Ⓐ $\boxed{\sigma_{D\perp} = \alpha_\perp \cdot \sigma_D ; \sigma_D = \frac{R_D}{k}}$ Ⓑ $\boxed{\sigma_{D\parallel} = \alpha_\parallel \cdot \sigma_D ; \sigma_D = \frac{R_D}{k}}$

16/17 ①

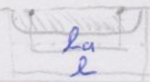


② ÚPRAVA HRAN DÍRY A HRAN HŘÍDELE



17/18 ② Ⓐ K HŘÍDELI $\varnothing d = 25$ mm, KTERÝ PŘENÁŠÍ $M = 90$ Nm PŘIŘAĎTE TĚSNÉ PERO DÉLKA l_a ABY $p = 50$ MPa, PRO TUTO DÉLKU URČIT VELIKOST SMYKOVÉHO NAPĚTÍ PRO KONTR. NA STŘIH

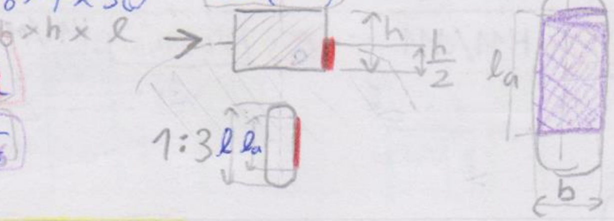
PERO $\overset{b \times h}{8 \times 7} \rightarrow p = \frac{F}{S}$ $F = \frac{M_k}{r}$ $S = \frac{h}{2} \cdot l_a$ $r = \frac{d}{2} \Rightarrow l_a = \frac{F}{p \cdot \frac{h}{2}} = \frac{2F}{p \cdot h} = \frac{2 \cdot \frac{M_k}{d/2}}{p \cdot h} = \boxed{\frac{4 \cdot M_k}{d \cdot h \cdot p} = l_a}$



SMYKOVÉ NAPĚTÍ $\boxed{\tau = \frac{2 M_k}{d \cdot b \cdot l_a}}$ $l_a = 41{,}1$ mm $\tau = 21{,}7$ MPa $= \frac{F}{S_s}$

18/19 ② D: $\varnothing d = 28$ mm, $M = 105$ Nm, PERO $8 \times 7 \times 30$ $\boxed{l_a = (l - b)}$

- KONTAKTNÍ PLOCHA: (BOKU PERA) $\boxed{(l - b) \cdot \frac{h}{2} = S_k} \rightarrow \boxed{p = \frac{F}{S_k}}$
- STŘIŽNÁ PLOCHA: $\boxed{(l - b) \cdot b = S_s} \rightarrow \boxed{\tau = \frac{F}{S_s}}$



VOLBA PERA dle HŘÍDELE (⌀):
- 22 – 30 → 8×7
- 30 – 38 → 10×8

MECHANIKA KONTINUA

1. Metoda uvolňování a rovnováha vzniklé soustavy sil pro soustavy s ideálními vazbami.
2. Metoda uvolňování a rovnováha vzniklé soustavy sil pro soustavy s pasivními odpory.
3. Vektorová metoda řešení kinematiky mechanismů.
4. Popis pohybu tělesa pomocí transformačních matic od základních druhů pohybu po obecný pohyb.
5. Sestavení pohybových rovnic Newton-Eulerovými rovnicemi a Lagrangeovými rovnicemi.
6. Kmitání soustav s 1 stupněm volnosti.

PP

7. Tah a tlak – sestavení a řešení diferenciálních rovnic rovnováhy elementu při namáhání tahem a jejich řešení a porovnání pracnosti, výhod a nevýhod ve srovnání s metodou řezu.
8. Ohyb nosníků – závislosti mezi *T*, *M* a *q*, deformace nosníků pomocí diferenciální rovnice průhybové čáry, spojitost mezi průhybem a jeho derivacemi s *T*, *M* a existence a výhody jiných metod řešení průhybu.
9. Stabilita přímých prutů – podmínka ztráty stability v pružném i nepružném stavu, přesné a přibližné řešení přímých prutů namáhaných osovou tlakovou silou.
10. Krut – volné kroucení kruhových, mezikruhových a nekruhových profilů, geometrické charakteristiky a deformace prutů namáhaných krouticími momenty.

TEKUT

11. Hydrostatika – Archimédův zákon, Pascalův zákon, Eulerova rovnice hydrostatiky, síla na rovinnou a zakřivenou plochu, relativní rovnováha.
12. Základní rovnice mechaniky tekutin – rovnice kontinuity, rovnice Bernoulliho, věta o změně hybnosti a jejich aplikace, proudění vazké nestlačitelné tekutiny potrubím (místní a třecí ztráty).

TERMO

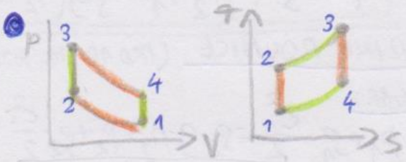
13. Základní zákony termodynamiky – 1. věta termodynamická, 2. věta termodynamická, stavová rovnice ideálních plynů, řešení změn stavu (vratné změny stavu ideálního plynu, nevratné stavové změny, změny stavu vodní páry v diagramech *p-v, h-s a T-s*).
14. Termodynamika tepelných strojů – Carnotův oběh, kompresor, pístové spalovací motory, spalovací turbína, parní turbína, chladicí oběh plynový a parní.

12/13 = 13/14

IIII ● TEK: VÍKO/STAVIDLO
IIIII ● TER: OBĚH
IIIIII ● MECH: LAGRANGE
II ● PP: VZPĚR
IIIIIII ● PP: KRUT PROFILU
ǂII ● PP: NOSNÍK
IIII ● TEK: VÝTOK-B.R.
I ● PP; TAH-TLAK
● TEK: ROTACE

TERMO: (13/14) 1

S = ENTROPIE = MÍRA NEUSPOŘÁDANOSTI SYSTÉMU



D: $p_{1,2,3,4}$ [MPa]; $T_{1,2,3,4}$ [K]; VZDUCH ($\varkappa = 1{,}4$; $r = 287\ J/kg\,K$)

U: OBĚH ?; q_0; q_p; w_0; η_T => OTTŮV OBĚH

1-2 KOMPRESE
2-3 PŘÍVOD TEPLA
3-4 EXPANZE
4-1 ODVOD TEPLA

● ADIABATA ($dq = 0$)
● IZOCHORA ($V = konst$)

$$c_V = \frac{r}{\varkappa - 1}$$

$$r = c_p - c_V$$

$$\varkappa = \frac{c_p}{c_V}$$

OTTŮV CYKLUS

$$q_p = q_{23} = c_V \cdot (T_3 - T_2)$$

$$q_0 = q_{41} = c_V \cdot (T_1 - T_4)$$

MĚRNÁ PRÁCE OBĚHU

$$w_0 = q_p - |q_0|$$

TERMICKÁ ÚČINNOST

$$\eta_T = \frac{w_0}{q_p} = 1 - \frac{|q_0|}{q_p}$$

(14/15)

STAVOVÁ ROUNICE:

$$p \cdot V = r \cdot T$$

IZOCHORICKÝ DĚJ

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

IZOBARICKÝ DĚJ

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$$

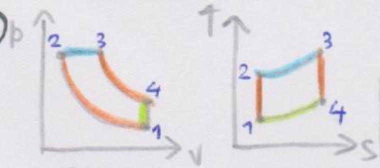
IZOTERMICKÝ DĚJ

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1}$$

ADIABATICKÝ DĚJ

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\varkappa} ; \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}$$

(16/17)



=> DIESLŮV OBĚH

D: $p_{1,2,3,4}$; $T_{1,2,3,4}$; VZDUCH -> $\varkappa$, r U: c_V, c_p; q_0; q_p; w_0, η_T

1-2 KOMPRESE
2-3 OHŘEV
3-4 EXPANZE
4-1 ODVOD TEP.

● IZOBARA ($p = konst$)

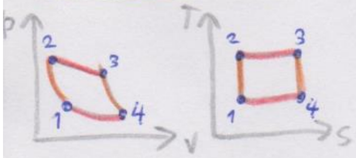
$$c_p = r + c_V = \varkappa \cdot c_V$$

DIESLŮV CYKLUS

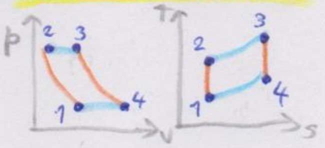
$$q_p = q_{23} = c_p \cdot (T_3 - T_2)$$

$$q_0 = q_{41} = c_V \cdot (T_1 - T_4)$$

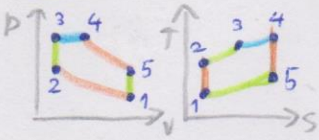
● **CARNOTŮV OBĚH:**



● **ERICSON-BRAYTONŮV**



● **SEILIGER-SABATHEŮV:**



1-2 KOMPRESE
2-3 PŘÍVOD TEPLA
3-4 ZMĚNA
4-5 EXPANSE
5-1 ODVOD TEPLA

$$\left.\begin{matrix}2\text{-}3\\3\text{-}4\end{matrix}\right\} q_p = q_{23} + q_{34} = c_V(T_3 - T_2) + c_p(T_4 - T_3)$$

$$q_0 = c_V \cdot (T_1 - T_5)$$

TEKUTINY 1

ARCHIMÉDŮV ZÁKON

$$F_{VZ} = m \cdot g = \rho \cdot g \cdot V = \rho \cdot g \cdot S \cdot h$$

HYDROSTAT. TLAK

$$p = h \cdot \rho \cdot g$$

TLAK

$$p = \frac{F}{S}$$

PASCALŮV ZÁKON

$$p_2 - p_1 = -\rho g (h_2 - h_1)$$

EULEROVA ROUNICE :-)

$$dp = \rho \cdot (k_x dx + k_y dy + k_z dz)$$

ROUNICE KONTINUITY

$$\dot{m} = \rho \cdot \dot{V} = \rho \cdot c \cdot A = konst.$$

$$\rho_1 = \rho_2 \Rightarrow \dot{V} = c \cdot A = konst. \left[\frac{m^3}{s}\right]$$

BERNOULIHO ROUNICE (PRO 1D STAC. ID.T.)

- **TLAKOVÝ TVAR:**

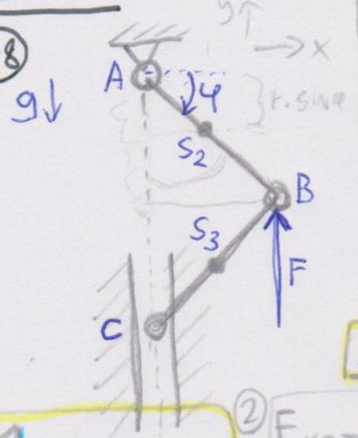
$$\rho_1 \cdot g \cdot h_1 + p_1 + \rho_1 \cdot \frac{c_1^2}{2} = \rho_2 \cdot g \cdot h_2 + p_2 + \rho_2 \cdot \frac{c_2^2}{2}$$

- **ENERG. TVAR** = T.T./(:ρ) = konst.
- **VÝŠKOVÝ TVAR** = T.T./(:($\rho \cdot g$)) = konst.

MECHANIKA $\boxed{11}$

LAGRANGEOVY ROVNICE II. DRUHU

(17/18)

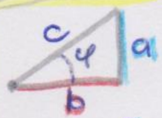


$$\boxed{\frac{d\left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}}\right)}{dt} - \frac{\partial E_k}{\partial q} = Q}$$

E_k = KINETICKÁ ENERGIE
q = ZOBECNĚNÁ SOUŘADNICE
Q = ZOBECNĚNÁ SÍLA
$\dot{q}$ = ZOBECNĚNÁ RYCHLOST
t = ČAS

D: $AS_2 = S_2B = BS_3 = S_3C = r$; m_2 ; I_{2S} ; m_3 ; I_{3S} ; F ; g

$\boxed{v = \omega . r} \boxed{= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}$ $\boxed{\omega = \dot{\varphi}}$ $\boxed{q = \varphi = 1° \text{VOLNOSTI}}$



$\sin\varphi = \frac{a}{c} \Rightarrow a = \sin\varphi . c$

$\cos\varphi = \frac{b}{c} \Rightarrow b = \cos\varphi . C$

② $\boxed{E_{K2} = \frac{1}{2} m_2 . v_2^2 + \frac{1}{2} I_{2S} . \omega_2^2} \rightarrow E_{K_2} = \frac{1}{2} . \omega_2^2 . (m_2 . r^2 + I_{2S})$

$E_{K3} = \frac{1}{2} m_3 v_3^2 + \frac{1}{2} I_{3S} . \omega_3^2$ $\quad E_K = E_{K2} + K_{K3}$

$x_3 = r . \cos\varphi$ $\quad y_3 = -3 . r . \cos\varphi$

$\dot{x}_3 = -\dot{\varphi} . r . \sin\varphi$ $\quad \dot{y}_3 = -3 . \dot{\varphi} . r . \sin\varphi$

$V_3^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = r^2 . \dot{\varphi}^2 . (\sin^2\varphi + 9\cos^2\varphi)$ $\quad \omega_2 = \dot{\varphi}$ $\quad \omega_3 = \dot{\varphi}$

$= E_K = \frac{1}{2} . \dot{\varphi}^2 [I_{2S} + m_2 . r^2 + m_3 . r^2 . (\sin^2\varphi + 9 . \cos^2\varphi) + I_{3S}]$

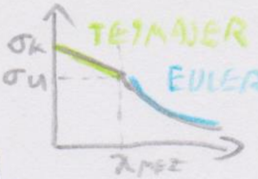
③ ZOBECNĚNÁ SÍLA

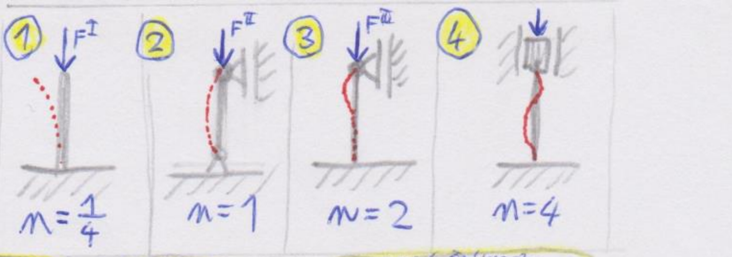
VARIÁTOR

$Q \delta\varphi = F . 2r\cos(\pi - \varphi) . \delta y_B - G_2 . r . \sin\varphi .$

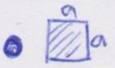
PP $\boxed{1}$

VZPĚR



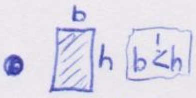


PRŮŘEZ:



$A=a^2$

$J_{MIN}=\frac{a^4}{12}$



$A=b\cdot h$

$J_{MIN}=\frac{b\cdot h^3}{12}$

$A=\frac{\pi\cdot d^2}{4}$

$J_{MIN}=\frac{\pi\cdot d^4}{64}$

$$\boxed{i_{MIN}=\sqrt{\frac{J_{MIN}}{A}}}$$

ŠTÍHLOST PRUTU

$$\boxed{\lambda=\frac{l}{i_{MIN}}}$$

MEZNÍ ŠTÍHLOST

$$\boxed{\lambda_{MEZ}=\sqrt{\frac{n\cdot\pi\cdot E}{\sigma_U}}}$$

$\sigma>\sigma_U$ => ~~EULER~~ TETMAJER

$\sigma<\sigma_U$ => EULER

$$\boxed{F_{KR}^{III}=k\cdot F_D=\frac{n\cdot\pi^2\cdot E\cdot J_{MIN}}{l^2}}$$

$$\boxed{\sigma_{KR}^E=\frac{F_{KR}}{A}=\frac{k\cdot F}{A}}$$

a) $\sigma_{KR}^E<\sigma_U$ ✓

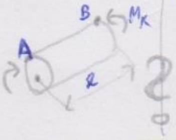
b) $\lambda^E>\lambda_{MEZ}$ ✓

$$\boxed{\sigma_{KR}^T=\sigma_K-(\sigma_K-\sigma_U)\cdot\frac{\lambda}{\lambda_{MEZ}}}$$

a) $\sigma_{KR}^T\in\langle\sigma_U;\sigma_K\rangle$ ✓

b) $\lambda^T<\lambda_{MEZ}$ ✓

KRUT:



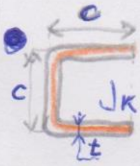
KDYŽ NEZNÁM h:

$h=2\cdot\pi\cdot R$

$J_K=\frac{2}{3}\pi\cdot R\cdot t^3$

$h=\pi\cdot R$

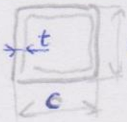
$J_K=\frac{1}{3}\pi\cdot R\cdot t^3$



$h=3\cdot c$

$J_K=\frac{1}{3}3\cdot c\cdot t^3$

UZAVŘENÝ PROFIL



$W_K=2\cdot A_S\cdot t_{MIN}$

$W_K=2\cdot c^2\cdot t$

…!-)

PRŮŘEZOVÉ CHARAKTERISTIKY:

$$\boxed{J_K=\frac{1}{3}\cdot h\cdot t^3\quad W_K=\frac{1}{3}h\cdot t^2=\frac{J_K}{t}}$$

PEVNOSTNÍ PODMÍNKA:

$$\boxed{\tau_{MAX}=\frac{M_K}{W_K}\leq\tau_D}$$

NATOČENÍ KONCŮ:

$$\boxed{\varphi_{A-B}=\frac{M_K\cdot l}{G\cdot J_K}}=[RAD]\cdot\frac{180}{\pi}=[°]$$

BERNOULIHO DIF.R.:

- ROUNICE POSOUVAJÍCÍ SÍLY: $(T_{(x)})$: $EJ\cdot v'''=q_0x+C_1$
- ROUNICE OHYB. MOMENTU: $(M_o(x))$: $EJ\cdot v''=q_0\frac{x^2}{2}+C_1\cdot x+C_2$
- ROUNICE NATOČENÍ: $(\varphi(x))$: $EJ\cdot v'=q_0\frac{x^3}{6}+C_1\cdot\frac{x^2}{2}+C_2\cdot x+C_3$
- ROUNICE PRŮHYBU: $(v(x))$: $EJ\cdot v=q_0\frac{x^4}{4!}+C_1\cdot\frac{x^3}{6}+C_2\cdot\frac{x^2}{2}+C_3\cdot x\cdot C_4$

-> ZÁKLADNÍ ROUNICE $(M_o(x)=-F\cdot x=-v'')$

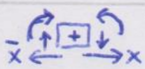
-> INTEGRACE + C

-> OKRAJOVÉ PODM -> C

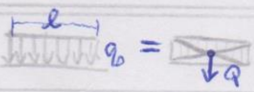
DONE :-)

$G=m\cdot g=V\cdot\rho\cdot g=A\cdot l\cdot\rho\cdot g$; $\sigma=\frac{N}{A}$; $\varepsilon=\frac{\sigma}{E}$; $\Delta l_1=\int_0^{a_1}(\varepsilon_1+\alpha_1\cdot\Delta t_1)\,dx$

$\sigma_S=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}$; $\sigma_R=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_z^2}$; KONVENCE:



;



$Q=q_0\cdot l$

SCHWEDLEROVA VĚTA:

$$\boxed{\frac{dT}{dx}=-q_0(x)\ ;\ \frac{dM_o}{dx}=T_{(x)}}$$

MUSÍM SI VYJÁDŘIT $q(x)=q_0\cdot\frac{x}{l}$ (NAPŘ.)

$\frac{dT}{dx}=-q_0\cdot\frac{x}{l}\Rightarrow dT_{(x)}=-q_0\cdot\frac{x}{l}dx$

$\Longrightarrow T_{(x)}=-q_0\cdot\frac{x^2}{2\cdot l}+C_1\Rightarrow\frac{dM_o}{dx}=-q_0\cdot\frac{x^2}{2l}+C_1\Rightarrow M_o(x)=-q_0\frac{x^3}{6\cdot l}+C_1\cdot x+C_2$

OKRAJ. PODM. => NAPŘ: $M_o(0)=0$; $M_o(l)=0$ $=C_1$ A C_2