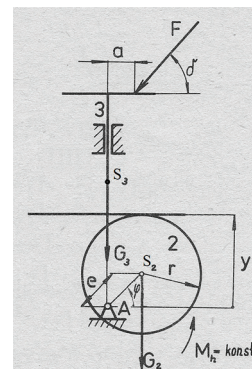


Typové příklady z přijímacích zkoušek do navazujících studijních programů v ak. roce 2012/2013

Mechanika těles

Na obrázku je vačkový mechanismus pohonu palivového čerpadla spalovacího motoru, na který působí hnací moment M_h a zátěžná síla F . Sestavte jeho vlastní pohybovou rovnici.



1. K popisu polohy soustavy zvolte nezávislou souřadnici. Vyjádřete kinetickou energii jako funkci této souřadnice a jejích časových derivací.
2. Vyjádřete zobecněnou sílu. Přitom uvažujte i vlastní tíhy členů.
3. Sestavte vlastní pohybovou rovnici vačkového mechanismu užitím Lagrangeových rovnic druhého druhu.
4. Vliv pasivních odporů zanedbejte.

Dáno: $m_2, m_3, I_{2A}, F, M_h, e, r, a, \delta, g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$

Vačkový mechanismus - řešení

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q} = Q$$

Ad 1.

$$q = \varphi$$

Ad 2.

$$E_k = \frac{1}{2} I_{2A} \omega_2^2 + \frac{1}{2} m_3 v_3^2$$

$$\omega_2 = \dot{\varphi}$$

$$y_3 = e \sin \varphi + r$$

$$v_3 = e \dot{\varphi} \cos \varphi$$

$$E_k = \frac{1}{2} (I_{2A} + m_3 e^2 \cos^2 \varphi) \dot{\varphi}^2$$

Ad 3.

$$Q \tilde{\omega}_2 = M_h \tilde{\omega}_2 - m_2 g \tilde{v}_2 \cos \varphi - (F_3 \sin \delta + m_3 g) \tilde{v}_3$$

$$\tilde{v}_2 = e \tilde{\omega}_2$$

$$\tilde{v}_3 = e \tilde{\omega}_2 \cos \varphi$$

$$Q = M_h - [(m_2 + m_3)g + F_3 \sin \delta] e \cos \varphi$$

Ad 4.

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} = (I_{2A} + m_3 e^2 \cos^2 \varphi) \dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} \right) = (I_{2A} + m_3 e^2 \cos^2 \varphi) \ddot{\varphi} + 2m_3 e^2 \cos \varphi (-\sin \varphi) \dot{\varphi}^2$$

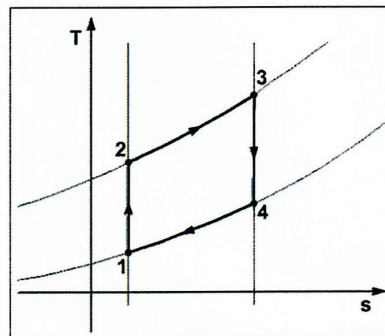
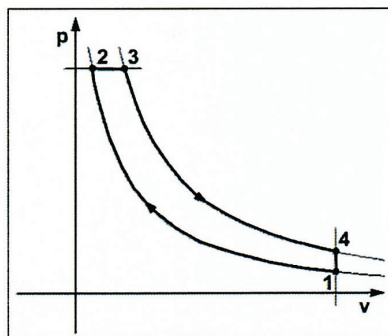
$$\frac{\partial E_k}{\partial \varphi} = m_3 e^2 \cos \varphi (-\sin \varphi) \dot{\varphi}^2$$

$$(I_{2A} + m_3 e^2 \cos^2 \varphi) \ddot{\varphi} - m_3 e^2 \cos \varphi \sin \varphi \dot{\varphi}^2 = M_h - [(m_2 + m_3)g + F_3 \sin \delta] e \cos \varphi$$

Termomechanika

Příklad 2A:

V diagramech je zakreslen porovnávací oběh spalovacího pístového motoru. Jsou známy tlaky a teploty ve všech významných bodech tohoto oběhu (viz. tabulka). Pracovním médiem je vzduch ($\kappa=1,4$, $r=287 \text{ J/kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$). Jak se tento porovnávací oběh nazývá? Určete měrné přivedené a odvedené teplo, měrnou práci oběhu a termickou účinnost tohoto oběhu.



	1	2	3	4
p [MPa]	0,1	0,9	0,9	0,408
T [K]	288,15	539,8	1473,15	1175,1

Řešení:

Dieselův oběh

$$q_p = c_p (T_3 - T_2) = 1004,5(1473,15 - 539,8) \doteq \underline{\underline{937550 J.kg^{-1}}}$$

$$q_o = c_v (T_1 - T_4) = 717,5(288,15 - 1175,1) \doteq \underline{\underline{-636387 J.kg^{-1}}}$$

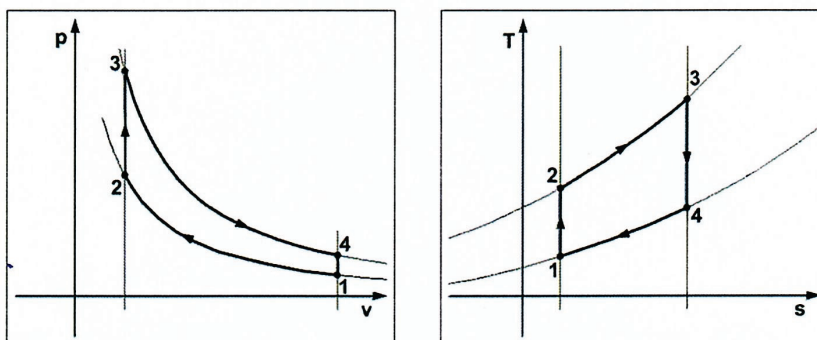
$$w_0 = q_p - |q_o| = 937550 - 636387 = \underline{\underline{301163 J.kg^{-1}}}$$

$$\eta_i = \frac{w_0}{q_p} = 1 - \frac{|q_o|}{q_p} = 1 - \frac{636387}{937550} = \underline{\underline{0,321}}$$

$$c_v = \frac{r}{\kappa - 1} = \frac{287}{1,4 - 1} = 717,5 J.kg^{-1}.K^{-1} \quad c_p = \frac{\kappa r}{\kappa - 1} = \frac{1,4.287}{1,4 - 1} = 1004,5 J.kg^{-1}.K^{-1}$$

Příklad 2B:

V diagramech je zakreslen porovnávací oběh spalovacího pístového motoru. Jsou známi tlaky a teploty ve všech významných bodech tohoto oběhu (viz. tabulka). Pracovním médiem je vzduch ($\kappa=1,4$, $r=287 J/kg^{-1}.K^{-1}$). Jak se tento porovnávací oběh nazývá? Určete měrné přivedené a odvedené teplo, měrnou práci oběhu a termickou účinnost tohoto oběhu.



	1	2	3	4
p [MPa]	0,1	0,387	1,5	0,388
T [K]	293,15	431,5	1673,15	1136,8

Řešení:

Ottův oběh

$$q_p = c_v(T_3 - T_2) = 717,5(1673,15 - 431,5) \doteq \underline{\underline{890884 J \cdot kg^{-1}}}$$

$$q_o = c_v(T_1 - T_4) = 717,5(293,15 - 1136,8) \doteq \underline{\underline{-605319 J \cdot kg^{-1}}}$$

$$w_0 = q_p - |q_o| = 890884 - 605319 = \underline{\underline{285565 J \cdot kg^{-1}}}$$

$$\eta_t = \frac{w_o}{q_p} = 1 - \frac{|q_o|}{q_p} = 1 - \frac{605319}{890884} = \underline{\underline{0,32}}$$

$$c_v = \frac{r}{\kappa - 1} = \frac{287}{1,4 - 1} = 717,5 J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$$

Mechanika tekutin

Příklad 1A:

Stanovte výsledný silový účinek vody na čtvrtválcové víko a stanovte úhel, který svírá s vodorovným směrem. Víko má poloměr $R=0,6\text{m}$ a délku $b=1,5\text{m}$. Je v hloubce $h=1,1\text{m}$. Hustota vody je 1000kg/m^3 a tíhové zrychlení $g=9,81\text{m/s}^2$.

$$F_x = \rho g \left(h - \frac{R}{2} \right) R \cdot b = 1000 \cdot 9,81 \left(1,1 - \frac{0,6}{2} \right) 0,6 \cdot 1,5 = 7063,2 N$$

$$F_y = \rho g \left(hR - \frac{\pi R^2}{4} \right) b = 1000 \cdot 9,81 \cdot \left(1,1 \cdot 0,6 - \frac{\pi \cdot 0,6^2}{4} \right) 1,5 \doteq 5551,33 N$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \underline{\underline{8983,66 N}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_y}{F_x} \Rightarrow \varphi \doteq \underline{\underline{38,17^\circ}}$$

Příklad 1B:

Násoskou na obrázku protéká voda. Výšky jsou $h_1=0,8\text{m}$, $h_2=2,2\text{m}$. Celková délka potrubí je $L=15\text{m}$. Průměr potrubí je $d=20\text{mm}$. Součinitel třecích ztrát je $\lambda=0,03$, ztrátový součinitel na vstupu je

$\zeta_v=0,9$, v každém koleně $\zeta_k = 0,4$ (v místě 1 je ztráta $2\zeta_k$) a ve ventilu $\zeta_{ven}=3,5$. Jiné ztráty neuvažujte. Napište Bernoulliovu rovnici pro reálnou kapalinu mezi hladinou 0 a výtokovým otvorem 2, vypočítejte objemový tok $Q[m^3/s]$ a tlakovou ztrátu $p_z[Pa]$ při průtoku vody násoskou. Hustota vody je $1000kg/m^3$ a tíhové zrychlení $g=9,81m/s^2$.

$$\frac{p_0}{\rho} + g(h_1 + h_2) = \frac{p_0}{\rho} + \frac{c^2}{2} \left(1 + \lambda \frac{L}{d} + \zeta_v + 4\zeta_k + \zeta_{ven} \right)$$

$$c = \sqrt{\frac{2g(h_1 + h_2)}{1 + \lambda \frac{L}{d} + \zeta_v + 4\zeta_k + \zeta_{ven}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81(0,8 + 2,2)}{1 + 0,03 \frac{15}{0,02} + 0,9 + 4 \cdot 0,4 + 3,5}} \doteq 1,41 m.s^{-1}$$

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} c \doteq \underline{\underline{4,43 \cdot 10^{-4} m^3.s^{-1}}}$$

$$p_z = \rho \frac{c^2}{2} \left(\lambda \frac{L}{d} + \zeta_v + 4\zeta_k + \zeta_{ven} \right) = 1000 \frac{1,437^2}{2} \left(0,03 \frac{15}{0,02} + 0,9 + 4 \cdot 0,4 + 3,5 \right) \doteq \underline{\underline{28330 Pa}}$$

Matematika

Fakulta strojní, ČVUT v Praze
Přijímací zkoušky do navazujícího magisterského studia (2012)
Aplikovaná matematika, verze B

1. [10 bodů] Je dána funkce $f(x) = \ln(3x+1) - x^2$.
- Vypočítejte derivaci této funkce. Napište rovnici tečny ke grafu této funkce v bodě $[x_0, f(x_0)]$, je-li $x_0 = 0$.
 - Napište Taylorův polynom $T_2(x)$ stupně 2 o středu $x_0 = 0$ zadané funkce f . Pomocí $T_2(x)$ určete přibližně hodnotu $f(x)$ pro $x = 1/3$ (ve tvaru zlomku v základním tvaru).
 - Vypočítejte derivaci třetího řádu dané funkce. Napište Lagrangeův tvar zbytku $R_3(x)$. Pomocí $R_3(1/3)$ odhadněte velikost chyby přibližného výpočtu hodnoty $f(1/3)$ z úlohy b). Výsledek uveďte ve tvaru zlomku v základním tvaru.

Řešení: a) $f'(x) = \frac{3}{3x+1} - 2x$, tečna: $y = 3x$.

b) $T_2(x) = 3x - \frac{11}{2}x^2$, $f(1/3) = 7/18$,

c) $f'''(x) = \frac{54}{(3x+1)^3}$, $R_3(x) = \frac{9}{(3\xi+1)^3}x^3$, ξ leží mezi x_0 a x , $|R_3(1/3)| \leq 1/3$.

2. [10 bodů]
- Napište kladně orientovanou křivku $C = \{[x, y] \in E_2; x^2 + \frac{y^2}{4} = 1\}$.
- Napište tvrzení Greenovy věty. Pomocí tohoto vztahu vypočítejte cirkulaci vektorového pole $\vec{f} = (3x - y, x)$ po dané orientované křivce C (tj. křivkový integrál $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s}$).
 - Tento křivkový integrál vypočítejte přímým výpočtem, tj. pomocí parametrizace dané křivky C .

Řešení: a) Cirkulace $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{\text{Int}C} 2 \, dx \, dy = 4\pi$

b) Parametrizace: $x = \cos t, y = 2 \sin t, t \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Cirkulace $\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} (2 - 3 \sin t \cos t) \, dt = 4\pi$.

3. [10 bodů] Je dána lineární soustava $\dot{X} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} X$.
- Vypočítejte vlastní čísla a vlastní vektory matice A této soustavy (pro kontrolu: vlastní čísla jsou $\lambda_{1,2} = \pm 2i$).
 - Určete fundamentální systém řešení a napište obecné řešení dané soustavy.
 - Určete bod rovnováhy a jeho typ. Popište (slovně) tvar fázových trajektorií.

Řešení: a) Vlastní čísla: $\lambda_{1,2} = \pm 3i$, pro λ_1 jsou vlastní vektory $X_1 = t(-2, 1 + 3i)^T, t \in \mathbb{C}, t \neq 0$.

b) Fundamentální systém: $\Phi_1(t) = \begin{pmatrix} -2 \cos 3t \\ \cos 3t - 3 \sin 3t \end{pmatrix}, \quad \Phi_2(t) = \begin{pmatrix} -2 \sin 3t \\ 3 \cos 3t + \sin 3t \end{pmatrix}$

Obecné řešení: $X(t) = C_1 \Phi_1(t) + C_2 \Phi_2(t), t \in \mathbb{R}$.

c) Bod rovnováhy je $[0, 0]$, je to jediné řešení soustavy $AX = 0$. Je typu střed. Fázové trajektorie jsou uzavřené křivky (elipsy) se středem v bodě rovnováhy.

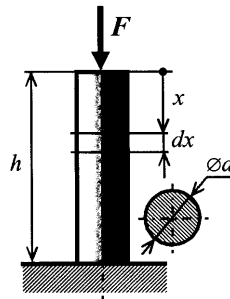
MECHANIKA KONTINUA – PRUŽNOST A PEVNOST

Ocelový (E, ρ) sloupek je zatížen osamělou tlakovou silou F .

Dáno: F, ρ, E, g, h, d

Vypočítat:

1. Sestavte rovnici rovnováhy elementu délky dx a z ní stanovte rovnici průběhu napětí $\sigma(x)$ po celé délce sloupku.
2. Vypočítejte extrémní hodnotu napětí σ .



Řešení:

Rovnice rovnováhy: $\sigma(x) \cdot A - [\sigma(x) + d\sigma(x)] \cdot A - dG = 0$ a $dG = \rho \cdot g \cdot A \cdot dx$

Dosazení: $-d\sigma(x) \cdot A = \rho \cdot g \cdot A \cdot dx \Rightarrow d\sigma(x) = -\rho \cdot g \cdot dx \Rightarrow \sigma(x) = -\rho \cdot g \cdot x + C$

Okrajová podmínka: $\sigma(0) = -\frac{F}{A} \Rightarrow C = -\frac{F}{A} \Rightarrow 1. \quad \sigma(x) = -\rho \cdot g \cdot x - \frac{F}{A}$

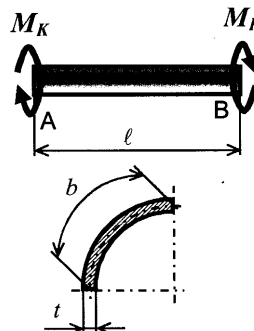
Maximální napětí: $\sigma_{\max} = |\sigma(h)| = \left| -\rho \cdot g \cdot h - \frac{F}{A} \right| \Rightarrow 2. \quad \sigma_{\max} = \frac{F}{A} + \rho \cdot g \cdot h$

Ocelový prut vyhlisovaný z plechu tloušťky t o rozměrech $b \times \ell$ (viz obrázek) je namáhán kroučícím momentem M_K .

Dáno: $t = 3 \text{ mm}, b = 60 \text{ mm}, \ell = 0,7 \text{ m}, G = 0,81 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$
 $M_K = 15 \text{ N} \cdot \text{m}$

Vypočítejte:

1. Maximální smykové napětí $\tau_{\max}$ při volném kroucení.
2. Vzájemné natočení konců prutu φ_{A-B} při volném kroucení. (Koncentraci vlivem zakřivení ve výpočtech zanedbejte!)



Řešení:

Průřez. charakter.: $J_K = \frac{1}{3} \cdot b \cdot t^3 = \frac{1}{3} \cdot 60 \cdot 3^3 = 540 \text{ mm}^4$ a $W_K = \frac{1}{3} \cdot b \cdot t^2 = \frac{1}{3} \cdot 60 \cdot 3^2 = 180 \text{ mm}^3$

Maximální napětí: $\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_K} = \frac{15000 \text{ N} \cdot \text{mm}}{180 \text{ mm}^3} \Rightarrow 1. \quad \tau_{\max} = 83,3 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$

Natočení konců: $\varphi_{A-B} = \frac{M_K \cdot \ell}{G \cdot J_K} = \frac{15000 \text{ N} \cdot \text{mm} \cdot 700 \text{ mm}}{540 \text{ mm}^4 \cdot 0,81 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}} \Rightarrow 2. \quad \varphi_{A-B} = 0,24 \text{ rad} \approx 13,75^\circ$

Části strojů

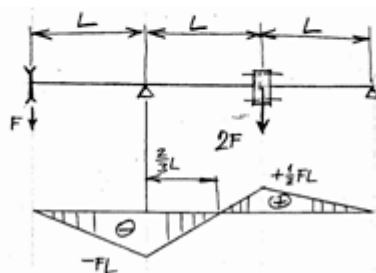
Řešení příkladů – přijímací zkouška do navaz. magister. studia

Části strojů, varianta A

1. otázka:

Průběh ohybového momentu na hřídeli

Pro hřídel s nasazeným ozubeným kolem a řemenicí na převislém konci podle obrázku nakreslete průběh ohybového momentu v rovině, ve které působí nakreslené síly. Schéma hřídele a průběh ohybového momentu s maximálními hodnotami je v následujícím obrázku:



2. otázka:

Návrh nejmenšího nutného průměru hřídele

Navrhnete nejmenší nutný průměr hřídele d podle namáhání krouticím momentem. Dovolené namáhání v krutu $\tau_D = 20 \text{ N} \cdot \text{mm}^{-2}$ a velikost momentu $M_K = 16 \text{ N} \cdot \text{m}$

Řešení: Nejmenší nutný průměr hřídele: $d = 15,97 \text{ mm}$

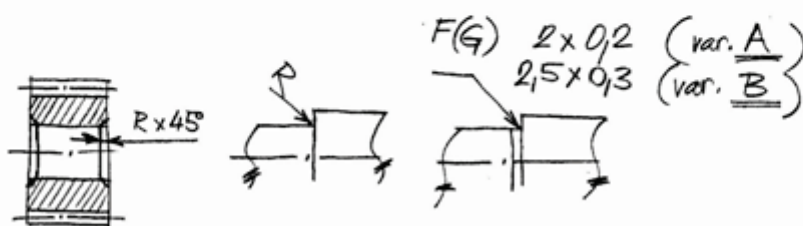
3. otázka

Náčrt úpravy hran díry a hřídele

Náčrtněte úpravu hran díry ozubeného kola a přilehlých hran hřídele.

Řešení:

V následujícím obrázku je nejvhodnější způsob úpravy hran díry (skosením) a dvě možnosti úpravy přiléhající hrany hřídele (zaoblení nebo normalizovaný zápich). Pro zápich jsou uvedeny správné velikosti v závislosti na spočítaném průměru hřídele pro varianty zadání A a B).



4. otázka

Návrh nepohyblivého uložení kola na hřídeli – soust. jednotné díry

Navrhněte nepohyblivé uložení ozubeného kola na hřídeli podle soustavy jednotné díry ISO.

Řešení:

Díra: toleranční pole H

Hřídel: možno přiřadit toleranční pole odpovídající uložení přechodnému nebo s přesahem,

tj.: j - js - k - m - n - p - r - s - t - u - v - x - y - z - za - ~~zb~~ - ~~zc~~

Technologie 1

Pro válcovitý výtah z nízkouhlikové oceli o průměru 100 mm, výšce 140 mm a tloušťce 1 mm:

- načrtněte příslušný nástroj a označte jeho 3 hlavní části
- určete rozměry potřebného polotovaru
- určete potřebný počet tahů
- určete potřebnou sílu lisu (= max. síla na začátku tažení)

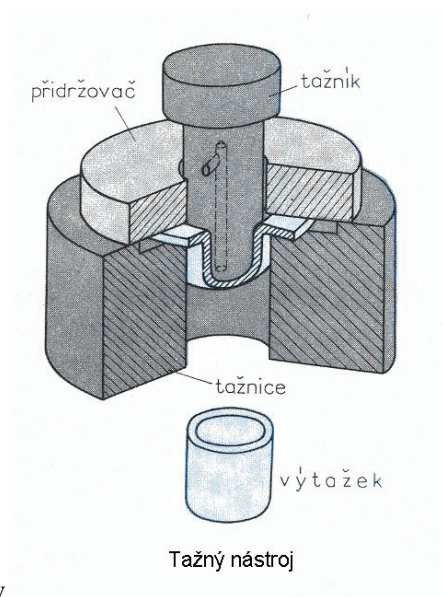
Při výpočtu zanedbejte zaoblení dna, anizotropii plechu, změny tloušťky plechu, přídavek na zarovnání okraje výtahu a tření mezi materiálem a nástrojem.

Charakteristiky uvažovaného materiálu:

- $R_m = 350 \text{ MPa}$,
- součinitel tažení pro 1. tažnou operaci $m_1 = d_1/D = 0,6$
- součinitel tažení pro případné další operace $m_n = d_n/d_{n-1} = 0,8$

Řešení:

- a) stačí obrázek ve 2D



Tažník
Tažnice
Přidržovač

2 body

2 body

- b) Ze zachování objemu při nezměněné tloušťce vyplývá $D = 256,9 \text{ mm} \approx 257 \text{ mm}$ – **2 body**

- c) $d = D \times m_1 \times m_2 \times m_3 \times \dots$

$$100 \approx 256,9 \times 0,6 \times 0,8 \times 0,8 \rightarrow \text{jsou potřebné } 3 \text{ tahy}$$

2 body

- d) Největší síla odpovídá síle na přetržení výtahu při 1. tahu

$$F = R_m \cdot \pi \cdot d_1 \cdot s = 350 \cdot \pi \cdot (0,6 \cdot 256,9) = 169\,400 \text{ N} \approx 170 \text{ kN} \approx 17 \text{ t}$$

2 body

Technologie 2

1. Zadání:

Pro případ podélného soustružení vnější válcové plochy na hrotovém soustruhu platí následující technologické (řezné) podmínky:

parametr	zadáání
řezná rychlost v_c	[m/min] 120
(axiální) posuv f	[mm/ot] 0,4
hloubka třísky a_p	[mm] 5
pevnost materiálu R_m	[MPa] 500
obráběný průměr D	[mm] 37
obráběná délka L	[mm] 113

Vypočítejte následující veličiny pro zadaný způsob obrábění:

- průřez odřezávané třísky (vrstvy) A_D [mm²],
- řeznou složku síly F_c [N] (= složka výsledné řezné síly ve směru hlavního pohybu v_c),
- řezný příkon P [kW] (= užitečný příkon vynaložený na odebrání třísky),
- Úběr U [cm³/min] (= objem odebraného materiálu za časovou jednotku).

Vypracování:

- Průřez odřezávané třísky je dán součinem axiálního posuvu a hloubky třísky,
 $A_D = a_p \cdot f = 5 \cdot 0,4 = 2 \text{ mm}^2$.

- Řezná složka síly F_c se počítá s pomocí měrné řezné síly k_c a průřezu odřezávané třísky $F_c = \frac{k_c}{A_D}$. Měrná řezná síla se počítá ze vzorce $k_c = c_k \cdot R_m$,

kde:

R_m ... je zadaná mez pevnosti materiálu

c_k ... je konstanta (pro soustružení je její hodnota 3 – 5, zvolíme 4).

Výsledná řezná síla je tedy $F_c = c_k \cdot R_m \cdot A_D = 4 \cdot 500 \cdot 2 = 4000 \text{ N}$.

- Řezný příkon P_c je dán součinem řezné síly a řezné rychlosti, tedy $P_c = F_c \cdot v_c$,
s přihlédnutím na různé jednotky $P_c = \frac{F_c \cdot v_c}{60000} = \frac{4000 \cdot 120}{60000} = 8 \text{ kW}$.

- Úběr materiálu U je dán součinem průřezu odřezávané třísky a řezné rychlosti, tedy
 $U = A_D \cdot v_c = 0,02 \cdot 12000 = 240 \text{ cm}^3 / \text{min}$.